



EUROPEAN BACCALAUREATE
ESCUELA EUROPEA

MATEMÁTICAS
5 PERIODOS

PARTE A · SIN CALCULADORA

JUNIO 2017





ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.



ANÁLISIS DE FUNCIONES

Sea la función definida por $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^2}$

Hallar una ecuación para cada una de las asíntotas de f y esbozar su gráfica junto con las asíntotas.

Resolución: En primer lugar calculo el dominio de $f(x)$. $Dom f(x) = R - \{0\}$

Asíntota Vertical: Posible asíntota vertical en $x=0$, compruebo mediante el cálculo de límites.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+1}{x^2} = \frac{1}{0}$; por lo que se deben calcular los límites laterales.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2+1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2+1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+1}{x^2} = +\infty \rightarrow \boxed{\mathbf{x=0 \text{ es Asíntota Vertical de } f(x)}}$$

Asíntota horizontal: Se calculan los límites en el infinito.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+1}{x^2} &= \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2+1}{x^2} &= \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2}{x^2} = 2 \end{aligned} \longrightarrow \boxed{\mathbf{y=2 \text{ es Asíntota Horizontal de } f(x)}}$$

ANÁLISIS DE FUNCIONES

Para poder representar la asíntota horizontal, se debe estimar si la función estará por encima o por debajo de ella. Para poder hacer la estimación, se dan valores altos a $f(x)$.

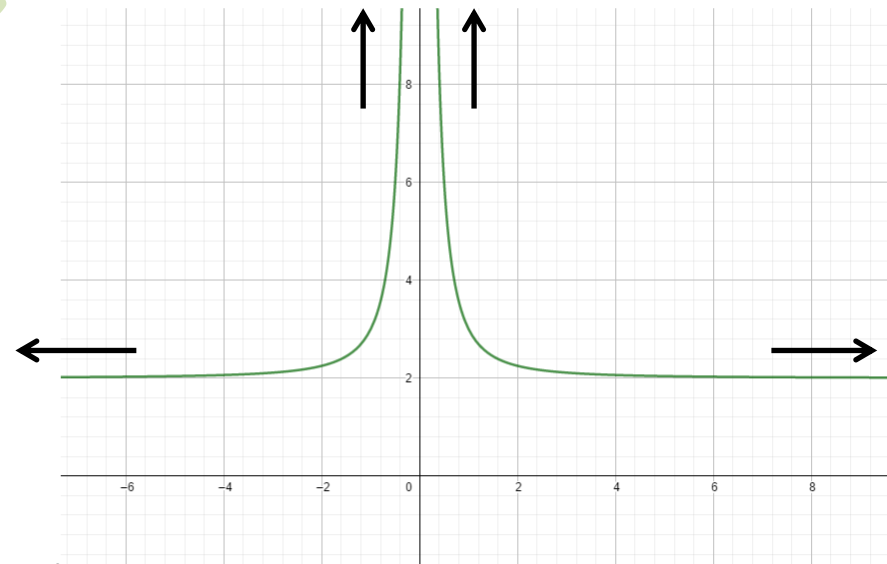
x	f(x)
100	$\frac{2 * 100^2 + 1}{100^2} > 2$
-100	$\frac{2 * (-100)^2 + 1}{(-100)^2} > 2$

En ambos casos la curva está por encima de la asíntota horizontal.

Por otro lado:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x^2 + 1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x^2 + 1}{x^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{cases}$$

En ambos casos la curva tiende a $+\infty$



GEOMETRÍA

Se consideran en un espacio tridimensional los puntos $A(0,0,3)$, $B(0,6,0)$ y $C(3,0,0)$ y el plano π que pasa por A y es normal al vector $\overrightarrow{BC}$.

Calcular la distancia del punto C al plano π .

Resolución: Necesitamos calcular la ecuación del plano π . Para ello se necesita el punto A y el vector $\overrightarrow{BC} = C - B = (3,0,0) - (0,6,0) = (3, -6, 0)$

A partir del vector normal y el punto, calculo la ecuación del plano, mediante:

$$\pi: A * (x - x_0) + B * (y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

$$\pi: 3 * (x - 0) - 6 * (y - 0) + 0(z - 3) = 0 \rightarrow \pi: 3x - 6y = 0$$

Para calcular la distancia se utiliza la fórmula correspondiente:

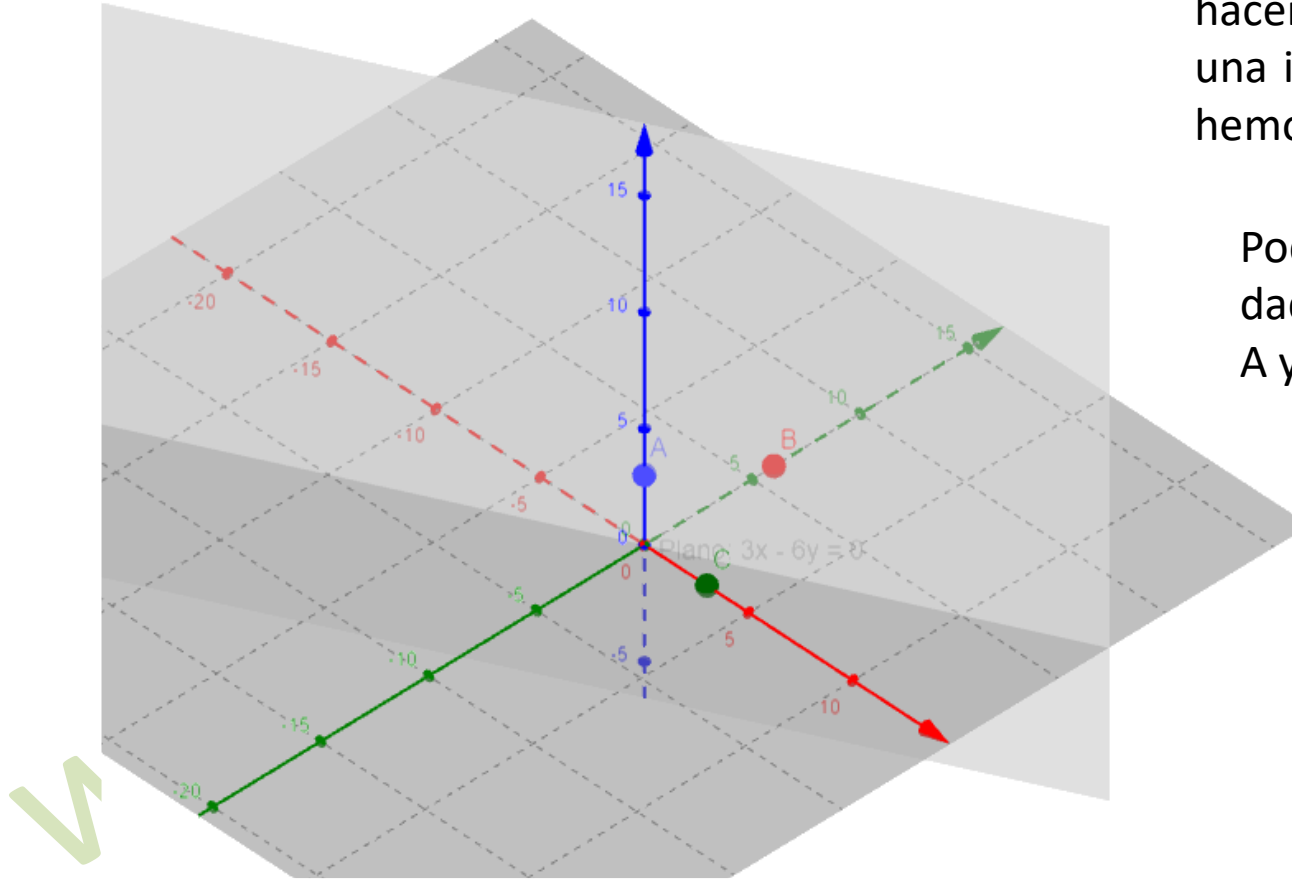
$$d_{\pi C} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \longrightarrow d_{\pi C} = \frac{|3 * 3 - 6 * 0 + 0 * 0 + 0|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 0^2}} = \frac{18}{\sqrt{45}} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$$

La distancia del punto C al plano π es $\frac{6\sqrt{5}}{5}$ unidades de longitud.

GEOMETRÍA

Aunque esto no lo podréis hacer en el examen, os muestro una imagen de la situación que hemos trabajado.

Podéis observar los 3 puntos dados y el plano que pasa por A y es perpendicular a BC.



PROBABILIDAD

3) Alicia y Bernardo comparten una bolsa de caramelos verdes y rojos.

La bolsa tiene 5 caramelos verdes y 4 rojos.

Alicia coge un caramelo de la bolsa al azar y lo guarda.

A continuación, Bernardo coge otro caramelo de la bolsa al azar.

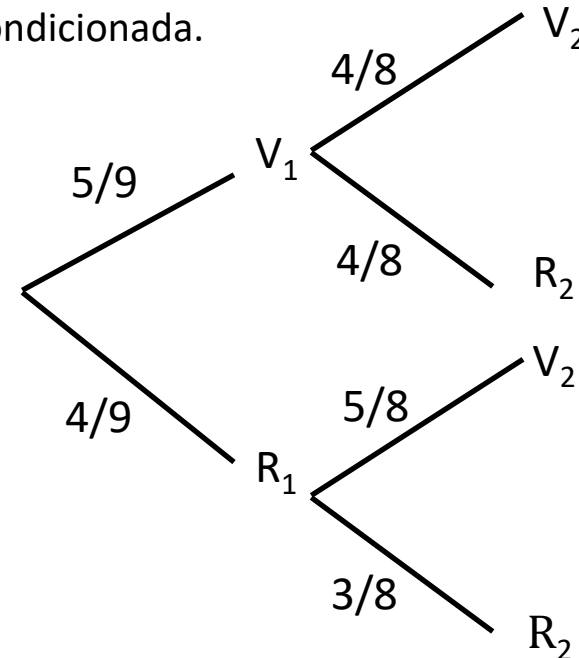
Sabiendo que el caramelo de Bernardo es rojo, calcular la probabilidad de que Alicia haya cogido también un caramelo rojo.

Resolución: Para plantear el problema, representamos un árbol de probabilidad.

Aplicaremos el **teorema de Bayes** para calcular la probabilidad condicionada.

$$P(R_1/R_2) = \frac{P(R_1 \cap R_2)}{P(R_2)} = \frac{P(R_1) * P(R_2/R_1)}{P(R_1) * P(R_2/R_1) + P(V_1) * P(R_2/V_1)}$$

$$P(R_1/R_2) = \frac{\frac{4}{9} * \frac{3}{8}}{\frac{4}{9} * \frac{3}{8} + \frac{5}{9} * \frac{4}{8}} = \frac{\frac{12}{72}}{\frac{12}{72} + \frac{20}{72}} = \frac{\frac{12}{72}}{\frac{32}{72}} = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$$



Solución: La probabilidad es de $3/8$.

SUCESIONES

4) Una sucesión $\{u_n\}$ está dada por la igualdad $u_n = n^2 - 2n - 1, \quad n \in \{1, 2, 3, \dots\}$

Demostrar que la sucesión $\{u_n\}$ es creciente.

Solución: Para que una sucesión sea creciente debe cumplir que: $u_{n+1} - u_n > 0$

Siendo: $u_{n+1} = (n + 1)^2 - 2(n + 1) - 1$

Se aplica la condición: $u_{n+1} - u_n = (n + 1)^2 - 2(n + 1) - 1 - (n^2 - 2n - 1)$

Operando:

$$u_{n+1} - u_n = n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 - 1 - n^2 + 2n + 1 = 2n - 1 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Con lo que queda demostrado que la sucesión es **creciente**.

NÚMEROS COMPLEJOS

5) Calcular $(1 + i)^{10}$. Dar la respuesta en la forma binómica $a+bi$.

Resolución: Para calcular una potencia tan alta es conveniente expresar la base de la potencia en forma polar (usar el binomio de Newton es posible, pero muy largo).

También se puede utilizar la forma exponencial: $z = r * e^{i\theta}$

$$w = 1 + i \rightarrow \begin{cases} \text{Módulo; } r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \text{Argumento; } \tan \theta = \frac{1}{1} \rightarrow \theta = 45^\circ \end{cases}$$

$$(1 + i)^{10} = (\sqrt{2})_{45^\circ}^{10} = 32_{450} = 32_{90} = \mathbf{32i}$$

Solución: $(1 + i)^{10} = \mathbf{32i}$

PRIMITIVAS

6) Sea la función f tal que su derivada está dada por $f'(x) = 1 - e^{-2x}$ y el valor mínimo de $f(x)$ es 2. **Hallar la función f .**

Resolución: En primer lugar, se calcula el valor de x en el cual $f(x)$ presenta un mínimo.

Para ello se iguala la derivada a cero. $1 - e^{-2x} = 0 \rightarrow e^{-2x} = 1 \rightarrow x = 0$

Se puede comprobar que en $x=0$ hay un mínimo con un estudio de signos $f'(x)$.

	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$			

Lo cual implica que $f(0)=2$ (por estar el mínimo en 2).

Por otro lado, $f(x)$ es la función primitiva de $f'(x)$. Debemos calcular la primitiva.

$$\int 1 - e^{-2x} dx = x - \int e^{-2x} dx = x - \left(\frac{-1}{2} \right) \int (-2) e^{-2x} dx = x + \frac{1}{2} e^{-2x} + C$$

Quedando $f(x) = x + \frac{1}{2} e^{-2x} + C$

Para calcular C , utilizamos que $f(0)=2 \rightarrow f(0) = 0 + \frac{1}{2} e^{-0} + C = 2 \rightarrow \frac{1}{2} + C = 2 \rightarrow C = \frac{3}{2}$

Solución: $f(x) = x + \frac{1}{2} e^{-2x} + \frac{3}{2}$

Geometría

7) Se consideran en un espacio tridimensional los puntos $A(0,0,1)$, $B(1,0,1)$ y $C(1,0,4)$. Calcular el área del triángulo ABC.

Resolución: El área de un triángulo se calcula mediante la fórmula: $A = \frac{1}{2} |\vec{AB} \times \vec{AC}|$

Calculo los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$:

$$\vec{AB} = B - A = (1,0,1) - (0,0,1) = (1,0,0)$$

$$\vec{AC} = C - A = (1,0,4) - (0,0,1) = (1,0,3)$$

Calculo el producto vectorial:

$$|\vec{AB} \times \vec{AC}| = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3\vec{j}$$

Aplicando la fórmula:

$$A = \frac{1}{2} * 3 = \frac{3}{2} \text{ u. a.}$$

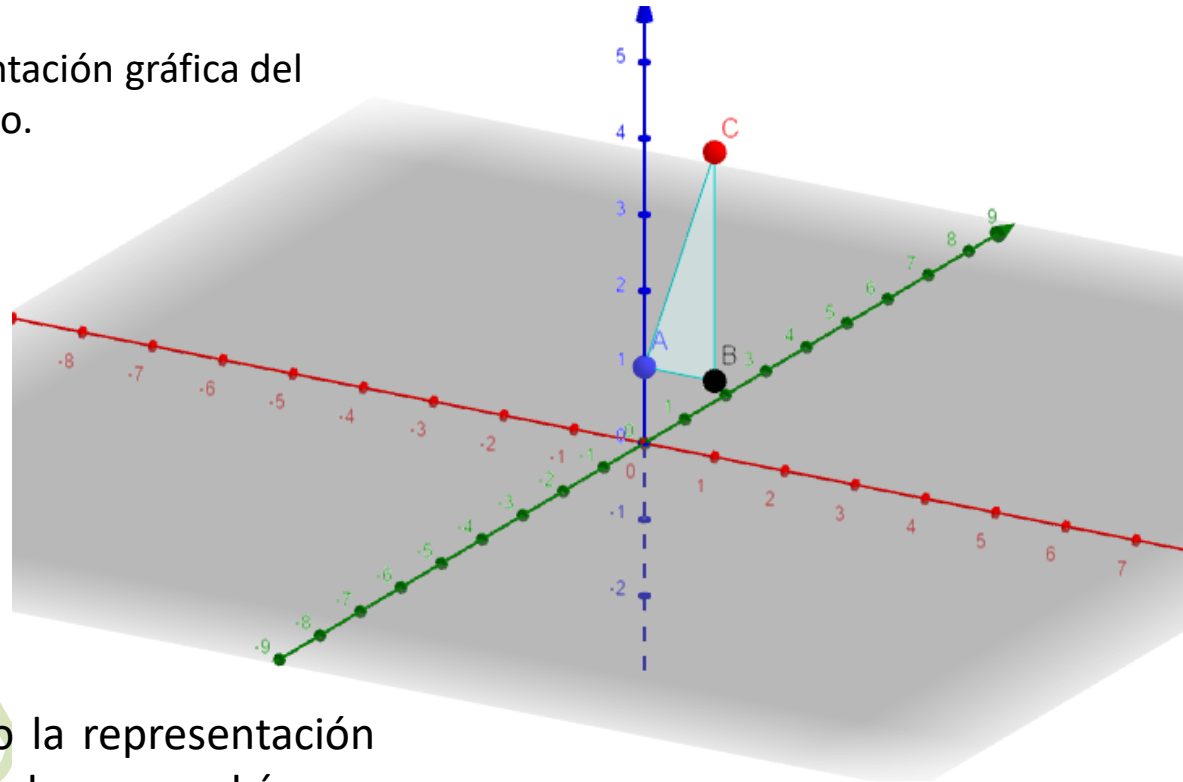
Si no has entendido como he hecho el determinante, te recomiendo que veas mi curso sobre matrices y determinantes (parte 3).

Si no recuerdas como calcular el módulo de un vector, te recomiendo que veas mi curso de geometría (parte 1)

Solución: El área del triángulo es 1'5 unidades de área.

Geometría

Aquí podéis ver una representación gráfica del problema que hemos resuelto.



Nota curiosa: Observando la representación gráfica nos damos cuenta de que podríamos sacar en área sin saber nada de geometría.

La distancia AB es 1 (base del triángulo).

La distancia BC es 3 (altura del triángulo)

El área del triángulo es

$$A = \frac{1 * 3}{2} = 1'5 \text{ u. a.}$$

Dado que se observa que el triángulo es rectángulo. Esto también se podría comprobar.