



EUROPEAN BACCALAUREATE
ESCUELA EUROPEA

MATEMÁTICAS
5 PERIODOS

PARTE A · SIN CALCULADORA

JUNIO 2018





ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.



Ejercicio 1: Primitivas

1) Calcular: $\int_0^1 \frac{x}{x^2-4} dx$

Resolución:

En primer lugar debemos identificar el tipo de integral. Como es un cociente y observamos que la derivada del denominador es casi igual que el numerador, suponemos que es una integral logarítmica.

La fórmula que aplicaremos será: $\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \text{Ln}|u(x)| + C$ **¡¡¡Toma lápiz y papel!!!**

A continuación se detalla el proceso.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x}{x^2-4} dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2-4} dx = \frac{1}{2} [\text{Ln}|x^2-4|]_0^1 = \frac{1}{2} (\text{Ln}|1^2-4| - \text{Ln}|0^2-4|) = \\ &= \frac{1}{2} (\text{Ln}(3) - \text{Ln}(4)) = \frac{1}{2} \text{Ln}\left(\frac{3}{4}\right)\end{aligned}$$

Nota: se ha aplicado la propiedad de los logaritmos $\text{Ln}(a) - \text{Ln}(b) = \text{Ln}(a/b)$.

Solución: $\int_0^1 \frac{x}{x^2-4} dx = \frac{1}{2} (\text{Ln}(3) - \text{Ln}(4)) = \frac{1}{2} \text{Ln}\left(\frac{3}{4}\right)$

Ejercicio 2. Geometría

2) Se considera la superficie esférica $S: (x - 3)^2 + y^2 + (z - 8)^2 = 16$

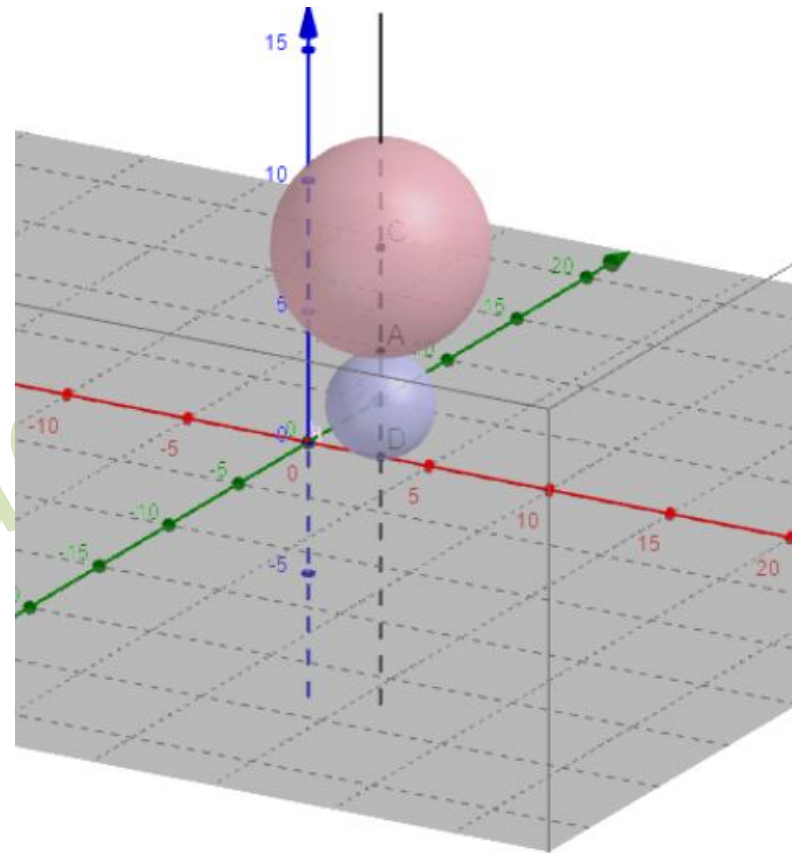
Hallar las coordenadas del centro y el radio de la superficie esférica más pequeña tangente a la vez a S y al plano OXY .

Resolución: De la ecuación de la esfera S se deduce que su centro es $C=(3,0,8)$ y su radio es 4.

Por otro lado, la distancia de C al plano OXY es 8 (el valor de la tercera coordenada), lo cual implica que la esfera S no corta al plano OXY ya que su radio es 4; ($\pi:z=0$).

El centro C' de la esfera tangente se encuentra en la recta que pasa por C y es perpendicular al plano OXY . La ecuación

paramétrica de dicha recta es: $r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 0 \\ z = 8 + \lambda \end{cases}$



Ejercicio 2. Geometría

La intersección de la recta r y la esfera S , es el punto de tangencia entre S y S' . Se calcula sustituyendo r en S .

$$(3 - 3)^2 + (0)^2 + (8 + \lambda - 8)^2 = 16 \rightarrow \begin{cases} \lambda = 4 \\ \lambda = -4' \end{cases}$$

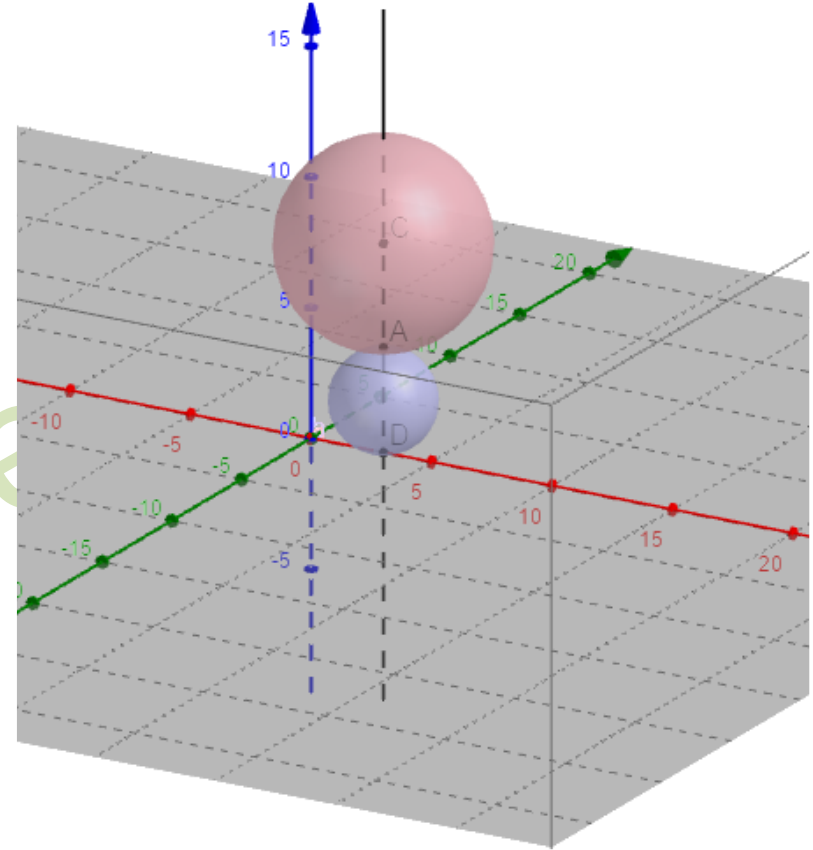
Sustituyendo λ en r , obtenemos los dos puntos de corte. $A=(3,0,12)$ y $B=(3,0,4)$. Como el punto más cercano de los dos al plano OXY es B, ese será el punto de tangencia.

Ahora calculamos la intersección de r con el plano OXY, que será $D=(3,0,0)$.

El centro C' de la esfera será el punto medio entre B y D.

$$C' = \frac{(3,0,4) + (3,0,0)}{2} = (3, 0, 2)$$

El radio de S' será la distancia de C' a B, que es 2.



!!! SOLUCIÓN!!!

Ejercicio 3. Probabilidad

3) El 80 % de los adolescentes que participan en un campamento deportivo son chicos. Los adolescentes votan por su deporte favorito.

El 90 % de los chicos y el 40 % de las chicas votan por el fútbol como deporte favorito.

Se elige un adolescente al azar. Supuesto que su deporte favorito es el fútbol, calcular la probabilidad de que el adolescente elegido sea un chico.

Definimos los siguientes sucesos:

C =Ser chico; $\bar{C}$ =Ser chica

F =Votar por fútbol; $\bar{F}$ =No votar por fútbol

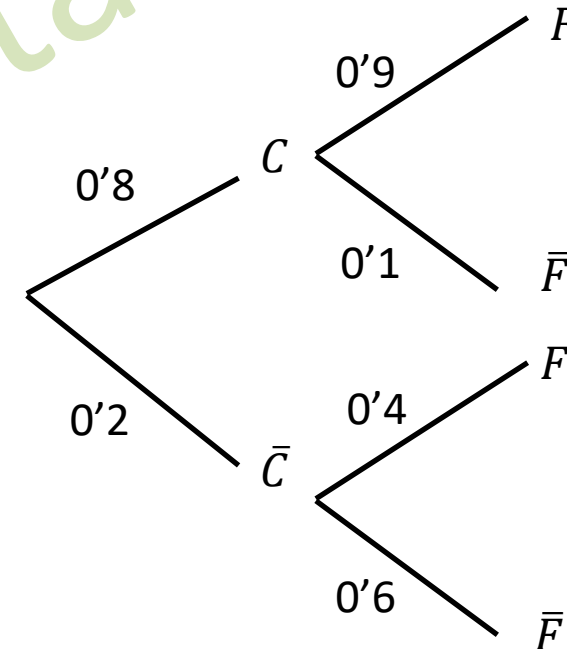
Para la probabilidad condicionada se aplica el **Teorema de Bayes**

$$P(C/F) = \frac{P(C \cap F)}{P(F)} = \frac{P(C) * P(F/C)}{P(C) * P(F/C) + P(\bar{C}) * P(F/\bar{C})}$$

Quedando:

$$P(C/F) = \frac{0'8 * 0'9}{0'8 * 0'9 + 0'2 * 0'4} = \frac{0'72}{0'8} = \boxed{0'9}$$

Solución: $P(C/F) = 0'9$



Ejercicio 4. Sucesiones recurrentes

4) Dadas las sucesiones (u_n) y (v_n) $\begin{cases} u_1 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{-7}{4}u_n - \frac{11}{3} \end{cases}$ y $v_n = 3u_n + 4, n \in \{1, 2, 3, \dots\}$

Comprobar que (v_n) es una progresión geométrica.

Resolución: Para que una sucesión v_n sea geométrica debe verificar que

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \textit{constante}$$

Siendo $v_{n+1} = 3u_{n+1} + 4$.

Se sustituye en la condición y se opera:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3 * \left(\frac{-7}{4}u_n - \frac{11}{3} \right) + 4}{3u_n + 4} = \frac{\frac{-21}{4}u_n - 11 + 4}{3u_n + 4} = \frac{\frac{-21u_n - 28}{4}}{3u_n + 4} = \frac{-7 * (3u_n + 4)}{4 * (3u_n + 4)} = \boxed{\frac{-7}{4}}$$

Por lo tanto v_n es una sucesión geométrica con **una razón de $-7/4$** .

Ejercicio 5. Números complejos

5) Resolver la ecuación $(2z + 3)i = \bar{z}$

Resolución: Expreso z y $\bar{z}$ en forma binómica. $z = x + yi$; $\bar{z} = x - yi$

Y sustituyo en la ecuación propuesta.

$$[2(x + yi) + 3]i = x - yi \rightarrow (2x + 2yi + 3)i = x - yi \rightarrow 2xi + 2yi^2 + 3i = x - yi$$

Teniendo en cuenta que $i^2 = -1$ y reordenando los términos, obtenemos.

$$(-2y) + (2x + 3)i = x - yi$$

Para que se verifique la igualdad de dos números complejos, sus partes reales deben ser iguales. También deben serlo sus partes imaginarias. Igualando obtenemos:

$$\begin{cases} -2y = x \\ 2x + 3 = -y \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, la solución de la ecuación es : $\boxed{z = -2 + i}$

Ejercicio 6. Funciones.

6) El diagrama muestra la gráfica de la derivada $f'(x)$ de una función polinómica f .

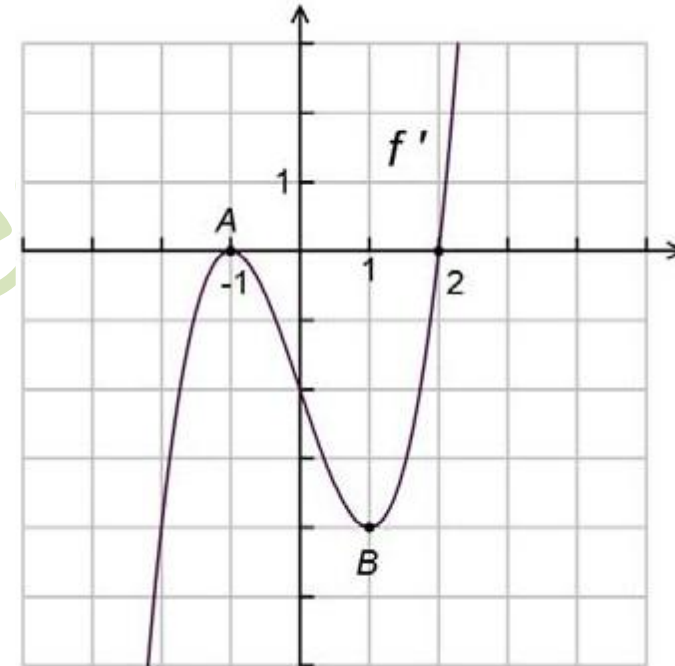
Los ceros de $f'(x)$ son $x = -1$ y $x = 2$.

Los puntos $A(-1,0)$ y $B(1,-4)$ corresponden a los extremos relativos de $f'(x)$.

Hallar las abscisas de los puntos de inflexión de la gráfica de f y la pendiente de cada una de las tangentes a la gráfica en dichos puntos.

Resolución: Para poder calcular los puntos de inflexión de $f(x)$, se debe estudiar la curvatura de la función con $f''(x)$.

Aprovechando la gráfica de la derivada, podemos deducir, mediante un estudio de signos, la curvatura de $f(x)$.



Ejercicio 6. Funciones.

Construimos una tabla de análisis de signos.

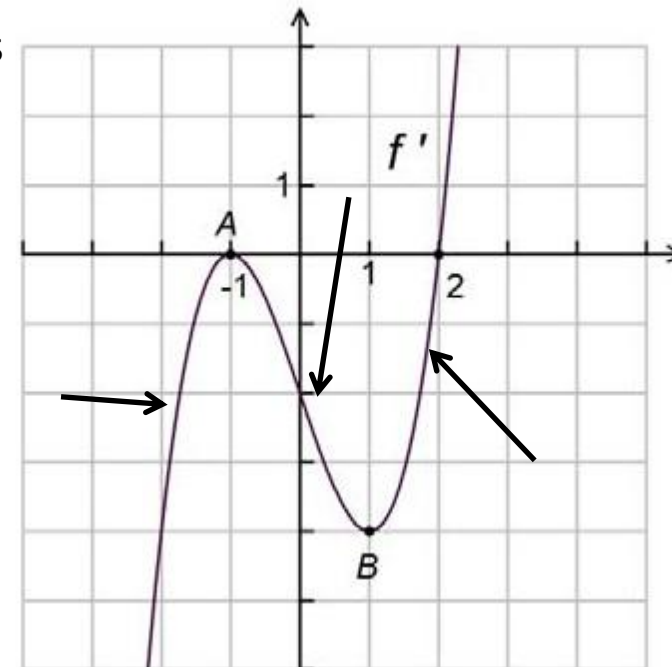
x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$
$f''(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	U	PI	$\cap$	PI	U

En los intervalos en los cuales $f'(x)$ es creciente, $f''(x)$ es positiva. Si $f'(x)$ es decreciente, $f''(x)$ es negativa

Del análisis de la tabla se deduce que hay cambios de curvatura en los puntos de abscisa $x=-1$ y $x=1$.

Solución: Los puntos de inflexión estarán en $x=-1$ y $x=1$

Las pendientes serán 0 y -4 respectivamente



Ejercicio 7. Probabilidad

7) Tenemos tres hojas de papel idénticas. Escribimos la letra A en una de las hojas, la letra B en otra y la letra C en la restante.

Doblamos las hojas dos veces para ocultar las letras. Tenemos también tres sobres marcados con A, B y C. Metemos aleatoriamente una hoja doblada en cada sobre.

Sea X la variable aleatoria que indica el número de hojas cuya letra coincide con la del sobre en que se ha metido.

Calcular la esperanza de X .

Resolución: Del enunciado se deduce que $X = \{0,1,2,3\}$.

Expresaremos los casos de forma que la primera letra indique la letra introducida en el sobre A, la segunda letra indique la letra introducida en el sobre B y la tercera letra la letra introducida en el sobre C.

Ejemplo: **ABC** significa que se introduce la letra A en el sobre A, la letra B en el sobre B, y la letra C en el sobre C.

Ejercicio 7. Probabilidad

El espacio muestral de este experimento será:

ABC Las tres letras están en el sobre correcto ($X=3$)

ACB Sólo una letra está en el sobre correcto ($X=1$)

BAC Sólo una letra está en el sobre correcto ($X=1$)

BCA Ninguna letra está en el sobre correcto ($X=0$)

CAB Ninguna letra está en el sobre correcto ($X=0$)

CBA Sólo una letra está en el sobre correcto ($X=1$)

Puesto que todos los sucesos son equiprobables:

$$P(ABC)=P(ACB)=P(BAC)=P(BCA)=P(CAB)=P(CBA)=1/6$$

Construyo una tabla de la función de probabilidad de la variable aleatoria X :

X	0	1	2	3
$P(X)$	$1/3$	$3/6$	0	$1/6$

Y calculo la esperanza matemática: $E(X) = \sum_{i=0}^3 X_i * P(X_i)$

$$E(X) = 0 * \frac{1}{3} + 1 * \frac{3}{6} + 2 * 0 + 3 * \frac{1}{6} = 1 \rightarrow \boxed{\text{Solución: } E(X)=1}$$