



EUROPEAN BACCALAUREATE
ESCUELA EUROPEA

MATEMÁTICAS
5 PERIODOS

EJERCICIO 1 · SIN CALCULADORA
INTEGRALES

JUNIO 2024



Ejercicio 1. Integrales

a) Demuestra que: $\frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{1}{x + 2} + \frac{-1}{x + 3}$

Solución: Este ejercicio se puede hacer de dos formas diferentes. La forma más fácil, que es la muestran en el solucionario, consiste en operar el lado derecho de la igualdad y obtener la expresión de la izquierda.

$$\frac{1}{x + 2} + \frac{-1}{x + 3} = \frac{x + 3 - (x + 2)}{(x + 2) \cdot (x + 3)} = \frac{x + 3 - x - 2}{x^2 + 3x + 2x + 6} = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$$

Que es lo que queríamos demostrar.

Existe otra forma, más complicada, de resolver este ejercicio. Y es el consistente en llevar a cabo la factorización lineal. En el sistema educativo español, lo utilizamos habitualmente para resolver integrales de funciones racionales.

Calculo las raíces del polinomio del denominador. $x^2 + 5x + 6 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = -3 \end{cases}$

Calculo los valores de A y B para factorizar linealmente la expresión.

$$\frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 3} = \frac{A \cdot (x + 3) + B \cdot (x + 2)}{(x + 2) \cdot (x + 3)} \rightarrow 1 = A \cdot (x + 3) + B \cdot (x + 2)$$

Ejercicio 1. Integrales

a) Demuestra que: $\frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{1}{x + 2} + \frac{-1}{x + 3}$

$$1 = A \cdot (x + 3) + B \cdot (x + 2)$$

Se dan los valores de las raíces a la expresión obtenida anteriormente.

$$\text{Si } x = -2 \rightarrow 1 = A \cdot (-2 + 3) + B \cdot (-2 + 2) \rightarrow 1 = A \cdot 1 + B \cdot 0 \rightarrow A = 1$$

$$\text{Si } x = -3 \rightarrow 1 = A \cdot (-3 + 3) + B \cdot (-3 + 2) \rightarrow 1 = A \cdot 0 + B \cdot (-1) \rightarrow B = -1$$

Con lo cual, podemos concluir que: $\frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{A}{x + 2} + \frac{B}{x + 3} = \frac{1}{x + 2} + \frac{-1}{x + 3}$

Que es lo que queríamos demostrar.

Ejercicio 1. Integrales

b) Para $x > 0$, calcula: $\int \frac{2}{x^2 + 5x + 6} dx$

Solución: Utilizaremos la relación demostrada en el apartado anterior. $\frac{1}{x^2 + 5x + 6} = \frac{1}{x + 2} + \frac{-1}{x + 3}$

$$I = \int \frac{2}{x^2 + 5x + 6} dx = 2 \cdot \int \frac{1}{x^2 + 5x + 6} dx = 2 \cdot \int \left(\frac{1}{x + 2} + \frac{-1}{x + 3} \right) dx = 2 \cdot \int \frac{1}{x + 2} dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x + 3} dx$$

$I = 2 \cdot \text{Ln } |x + 2| - 2 \cdot \text{Ln } |x + 3| + C$ Podríamos dar por concluido el ejercicio en este punto. Pero con fines pedagógicos se aplican las propiedades de los logaritmos y se obtienen nuevas expresiones, también válidas.

$I = 2 \cdot \text{Ln } (x + 2) - 2 \cdot \text{Ln } (x + 3) + C$ Se puede quitar el valor absoluto porque $\forall x > 0, x + 2 > 0$ y $x + 3 > 0$

Aplicamos las propiedades de los logaritmos. $k \cdot \text{Ln } A = \text{Ln } A^k$ $\text{Ln } A - \text{Ln } B = \text{Ln } \left(\frac{A}{B} \right)$

$$I = \text{Ln } (x + 2)^2 - \text{Ln } (x + 3)^2 + C = \text{Ln } \left(\frac{x + 2}{x + 3} \right)^2 + C$$

$$I = \text{Ln} \left(\frac{x + 2}{x + 3} \right)^2 + C; C \in \mathbb{R}$$