



EUROPEAN BACCALAUREATE
ESCUELA EUROPEA

MATEMÁTICAS
5 PERIODOS

EJERCICIO 2 · CON CALCULADORA
GEOMETRÍA EN EL ESPACIO



JUNIO 2024



Ejercicio 2. Geometría en el espacio

En un espacio tridimensional considera las rectas: $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $s, t \in \mathbb{R}$

Y los puntos: $A = (2, 1, -4)$ y $B = (6, 3, -4)$

Y el plano: $\alpha \equiv 2x - y + z + 1 = 0$

a) Demuestra que el punto A y las rectas g y h pertenecen al plano α .

Solución: Se comprueba que el punto A pertenece al plano α porque verifica su ecuación.

$$2 \cdot 2 - 1 + (-4) + 1 = 0 \quad \text{Por lo tanto, } A \in \alpha$$

Se hace lo mismo con las rectas g y h , expresadas en forma paramétrica.

$$g: \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 3 + s \\ z = -s \end{cases} \longrightarrow 2 \cdot (1 + s) - (3 + s) + (-s) + 1 \longrightarrow 2 + 2s - 3 - s - s + 1 = 0 \longrightarrow 0 = 0$$

Por lo tanto, $g \in \alpha$

$$h: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 4 + t \\ z = 1 - t \end{cases} \longrightarrow 2 \cdot (1 + t) - (4 + t) + (1 - t) + 1 \longrightarrow 2 + 2t - 4 - t + 1 - t + 1 = 0 \longrightarrow 0 = 0$$

Por lo tanto, $h \in \alpha$

Ejercicio 2. Geometría en el espacio

En un espacio tridimensional considera las rectas: $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ y $h: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $s, t \in \mathbb{R}$

Y los puntos: $A = (2, 1, -4)$ y $B = (6, 3, -4)$

Y el plano: $\alpha \equiv 2x - y + z + 1 = 0$

b) Determina el ángulo agudo, en grados, entre el plano α y la recta que pasa por A y B .

Solución: Se calcula el vector que va desde A hasta B . $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 1, -4) - (6, 3, -4) = (-4, -2, 0)$

El vector normal del plano es: $\vec{n} = (2, -1, 1)$

Se calcula el ángulo (β) que forman el vector normal del plano y el vector $\overrightarrow{AB}$. $\cos(\beta) = \frac{|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB}|}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{AB}|}$

$$\cos(\beta) = \frac{|(2, -1, 1) \cdot (-4, -2, 0)|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + 0^2}} = \frac{|-8 + 2 + 0|}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{20}} = \frac{6}{\sqrt{120}} \longrightarrow \beta = \arccos\left(\frac{6}{\sqrt{120}}\right) = 56,79^\circ$$

Se calcula el ángulo (γ) pedido: $\gamma = 90 - \beta = 90 - 56,79^\circ = 33,21^\circ$

El ángulo agudo, en grados, entre el plano α y la recta que pasa por A y B es **33,21°**.

Ejercicio 2. Geometría en el espacio

Y los puntos: $A = (2, 1, -4)$ y $B = (6, 3, -4)$

Y el plano: $\alpha \equiv 2x - y + z + 1 = 0$

c) Determina las coordenadas de la proyección ortogonal de B sobre el plano α .

Solución: El vector normal del plano es: $\vec{n} = (2, -1, 1)$

Se calcula la ecuación de la recta que pasa por B y tiene como vector director $\vec{n} = (2, -1, 1)$ $r: \begin{cases} x = 6 + 2\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = -4 + \mu \end{cases}; \mu \in \mathbb{R}$

Se calcula la intersección de la recta r y del plano α . Se sustituyen las ecuaciones de la recta en la del plano.

$$2 \cdot (6 + 2\mu) - (3 - \mu) + (-4 + \mu) + 1 = 0 \longrightarrow 12 + 4\mu - 3 + \mu - 4 + \mu + 1 = 0 \longrightarrow 6\mu + 6 = 0 \longrightarrow \mu = -1$$

Se sustituye el valor del parámetro en la ecuación de la recta y se obtiene el punto pedido.

$$P = (6 + 2\mu, 3 - \mu, -4 + \mu) = (6 + 2 \cdot (-1), 3 - (-1), -4 + (-1)) = (4, 4, -5)$$

Las coordenadas de la proyección ortogonal de B sobre el plano α son $P = (4, 4, -5)$

Ejercicio 2. Geometría en el espacio

Y los puntos: $A = (2, 1, -4)$ y $B = (6, 3, -4)$

Y el plano: $\alpha \equiv 2x - y + z + 1 = 0$

d) Sea D un punto del eje Z positivo. Determina las coordenadas de D , tal que el área del triángulo ABD sea igual a 20.

Solución: Las coordenadas de D se pueden escribir como: $D = (0, 0, z)$

Se calcula el vector que va desde A hasta B . $\overrightarrow{AB} = B - A = (2, 1, -4) - (6, 3, -4) = (-4, -2, 0)$

Se calcula el vector que va desde A hasta D . $\overrightarrow{AD} = D - A = (0, 0, z) - (6, 3, -4) = (-6, -3, z + 4)$

Se aplicará la fórmula del área de un triángulo. $A_T = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}|$

Calculo el producto vectorial con la fórmula del Booklet.

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = ((-4, -2, 0) \times (-6, -3, z + 4)) = (2 \cdot (z + 4), -4 \cdot (z + 4), 0) = (z + 4) \cdot (2, -4, 0)$$

Calculo el módulo del producto vectorial:

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{(z + 4)^2 \cdot (2^2 + (-4)^2 + 0^2)} = |z + 4| \cdot \sqrt{20} = (z + 4) \cdot \sqrt{20} \text{ ya que } z > 0$$

Ejercicio 2. Geometría en el espacio

Y los puntos: $A = (2, 1, -4)$ y $B = (6, 3, -4)$

Y el plano: $\alpha \equiv 2x - y + z + 1 = 0$

d) Sea D un punto del eje Z positivo. Determina las coordenadas de D , tal que el área del triángulo ABD sea igual a 20.

Se aplicará la fórmula del área de un triángulo. $A_T = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = 20$ $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = (z + 4) \cdot \sqrt{20}$

Sustituyo: $A_T = \frac{1}{2} \cdot (z + 4) \cdot \sqrt{20} = 20 \rightarrow z + 4 = \frac{40}{\sqrt{20}} = 4 \cdot \sqrt{5} \rightarrow z = 4 \cdot \sqrt{5} - 4$

Las coordenadas D son $D = (0, 0, 4 \cdot \sqrt{5} - 4)$