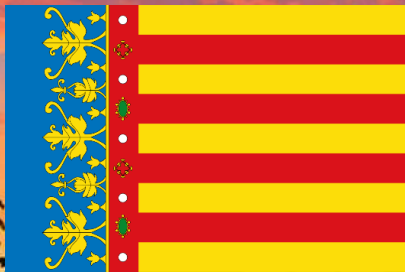


PRUEBA PARA MAYORES DE 20 AÑOS TÍTULO DE BACHILLERATO



COMUNIDAD
VALENCIANA

MATEMÁTICAS CCSS
I Y II

CONVOCATORIA 2020





ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.



Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este examen son:

- 1) Problema de sistemas de ecuaciones. 3 Incógnitas.
- 2) Cálculo de áreas mediante integrales. Continuidad y derivabilidad.
- 3) Probabilidad. Diagrama de árbol.
- 4) Estadística bidimensional.
- 5) Matrices.



EJERCICIO 1

En un contenedor hay 1200 kg de cítricos por valor de 1860€. Calcula cuántos kg hay de naranjas (1,2€/kg), cuántos de mandarinas (2,6€/kg) y cuantos de limones (0,8€/kg) si la suma de los kg de naranja y de limón dobla los kg de mandarinas.

Solución:

En primer lugar se definen las incógnitas. **x**=kilos de naranjas; **y**=kilos de mandarinas; **z**=kilos de limones

Traducimos del español al lenguaje algebraico.

“En un contenedor hay 1200 kg de cítricos” $\longrightarrow x + y + z = 1200$

“por valor de 1860€. Calcula cuántos kg hay de naranjas (1,2€/kg), cuántos de mandarinas (2,6€/kg) y cuantos de limones (0,8€/kg) “ $\longrightarrow 1'2x + 2'6y + 0'8z = 1860$

“la suma de los kg de naranja y de limón dobla los kg de mandarinas.” $\longrightarrow x + z = 2y \longrightarrow x - 2y + z = 0$

Obtenemos del planteamiento, un sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas.

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 1200 \\ 1'2x + 2'6y + 0'8z = 1860 \\ x - 2y + z = 0 \end{array} \right\}$$

Resolveré el sistema mediante el método de Gauss.

EJERCICIO 1

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z=1200 \\ 1'2x + 2'6y + 0'8z = 1860 \\ x - 2y + z = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1200 \\ 1'2 & 2'6 & 0'8 & 1860 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-1'2F_1 \\ F_3=F_3-F_1}]{} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1200 \\ 0 & 1'4 & -0'4 & 420 \\ 0 & -3 & 0 & -1200 \end{array} \right)$$

Como ya hay dos ceros en la tercera, ya podemos dar por concluido el algoritmo de Gauss. Se expresa de nuevo el sistema en forma algebraica.

$$\left. \begin{array}{l} x+y+z=1200 \\ 1'4y - 0'4z = 420 \\ -3y = -1200 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow x + 400 + 350 = 1200 \rightarrow x = \mathbf{450} \\ \rightarrow 560 - 0'4z = 420 \rightarrow -0'4z = -140 \rightarrow z = \mathbf{350} \\ \rightarrow y = \frac{-1200}{-3} = \mathbf{400} \end{array}$$

En el contenedor hay **450 kg de naranjas**, **400 kg de mandarinas** y **350 kg de limones**.

EJERCICIO 2

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1 \\ -x + 1, & 1 \leq x < 2 \\ x^2 - 5, & x \geq 2 \end{cases}$

a) Representála.

b) Calcula el área comprendida entre las rectas $x = 2$, $x = 3$, el eje X y la curva de la función.

c) ¿Es continua en $x = 2$? Justifica tu respuesta.

d) ¿Es derivable en $x = 2$? Justifica tu respuesta.

Solución:

Puesto que la función es a trozos, basta con representar cada trozo. Los dos primeros trozos son funciones cuadráticas.

$$y = 2x + 1$$

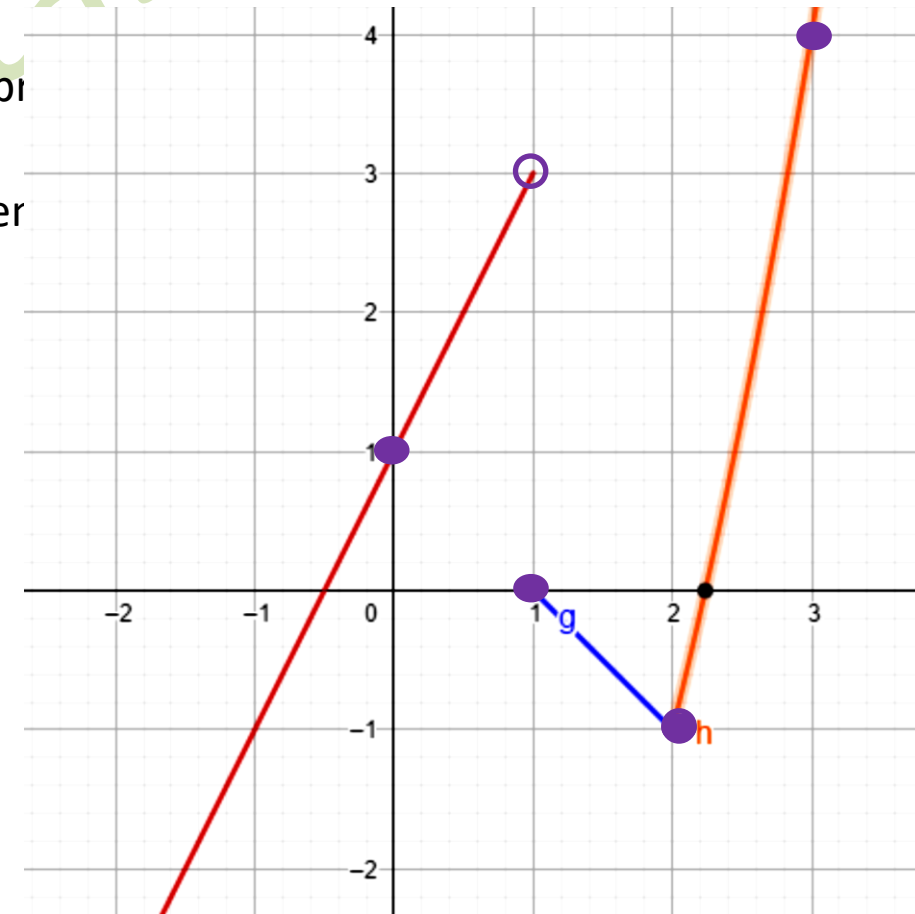
x	y
0	1
1	3

$$y = -x + 1$$

x	y
1	0
2	-1

$$y = x^2 - 5$$

x	y
2	-1
3	4



EJERCICIO 2

Dada la función: $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1 \\ -x + 1, & 1 \leq x < 2 \\ x^2 - 5, & x \geq 2 \end{cases}$

- b) Calcula el área comprendida entre las rectas $x=2$, $x=3$, el eje X y la curva de la función.
c) ¿Es continua en $x=2$? Justifica tu respuesta.
d) ¿Es derivable en $x=2$? Justifica tu respuesta.

Solución:

Como se puede ver en la gráfica, la función en el intervalo $(2,3)$ tiene un tramo negativo y otro tramo positivo. El área comprendida entre las rectas $x=2$, $x=3$, el eje X y la curva de la función se calcula calculando el punto de corte con el eje X para obtener el punto donde la función cambia de signo.

Es $\frac{x^2 - 5 = 0}{x^2 = \frac{20\sqrt{5}}{3} = 0 \frac{40}{3} \approx 13.33}$ unidades de área. El valor utilizado será $\sqrt{5}$ ya que es el valor comprendido entre 2 y 3.

Puesto que la función cuadrática en ese intervalo tiene un tramo negativo entre 2 y $\sqrt{5}$ y es positiva entre $\sqrt{5}$ y 3, debemos hacer dos integrales. El resultado será la suma del valor absoluto de ambas integrales.

$$\int_2^{\sqrt{5}} x^2 - 5 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 5x \right]_2^{\sqrt{5}} = \left(\frac{(\sqrt{5})^3}{3} - 5 \cdot \sqrt{5} \right) - \left(\frac{2^3}{3} - 5 \cdot 2 \right) = \frac{22}{3} - \frac{10\sqrt{5}}{3} \approx -0.12$$

$$\int_{\sqrt{5}}^3 x^2 - 5 \, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 5x \right]_{\sqrt{5}}^3 = \left(\frac{3^3}{3} - 5 \cdot 3 \right) - \left(\frac{(\sqrt{5})^3}{3} - 5 \cdot \sqrt{5} \right) = \frac{10\sqrt{5}}{3} - 6 \approx 1.45$$

$$A = \left| \frac{22}{3} - \frac{10\sqrt{5}}{3} \right| + \left| \frac{10\sqrt{5}}{3} - 6 \right| = \frac{10\sqrt{5}}{3} - \frac{22}{3} + \frac{10\sqrt{5}}{3} - 6 = \frac{20\sqrt{5}}{3} - \frac{40}{3} \approx 1.57$$

EJERCICIO 2

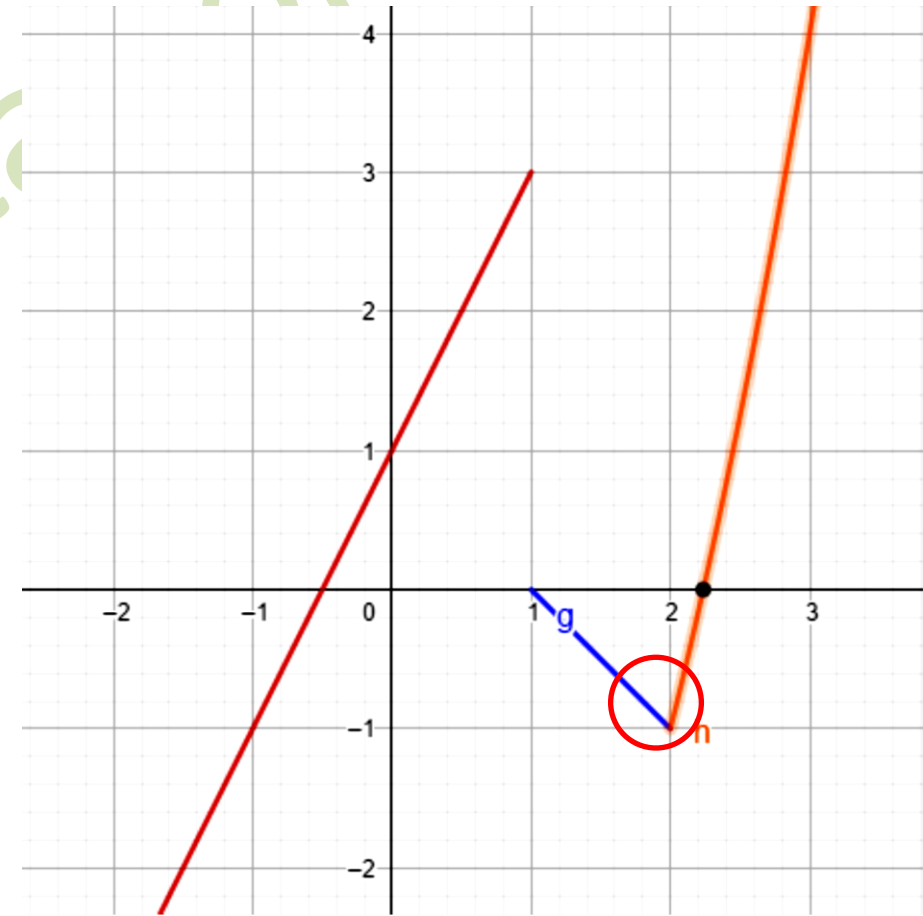
Dada la función:
$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1, & x < 1 \\ -x + 1, & 1 \leq x < 2 \\ x^2 - 5, & x \geq 2 \end{cases}$$

- c) ¿Es continua en $x=2$? Justifica tu respuesta.
d) ¿Es derivable en $x=2$? Justifica tu respuesta.

Solución:

Se observa en la gráfica que hay un cambio brusco de pendiente en $x=2$, lo cual hace que $x=2$ sea un **punto anguloso**. También podríamos hacer un estudio de la continuidad y la derivabilidad de forma analítica, pero disponiendo de la gráfica no lo considero necesario.

Observando la gráfica hecha en el primer apartado podemos afirmar que la función **es continua en $x=2$** , pero **no es derivable en $x=2$** .



EJERCICIO 3

En una empresa cerámica hay 3 líneas de producción que fabrican baldosas aptas y baldosas defectuosas. La primera línea fabrica un 3% de baldosas defectuosas y se hacen en ella la mitad de las baldosas de la empresa, la segunda línea realiza un 1% de baldosas defectuosas y fabrica la sexta parte de la producción, mientras que la tercera línea, fabrica un 98% de baldosas aptas y fabrica el resto de las baldosas. Si se tiene al azar una baldosa defectuosa, calcula la probabilidad de que la haya fabricada la segunda línea de producción.

Solución:

Se calcula en primer lugar la probabilidad de que la baldosa haya sido fabricada en la tercera línea.

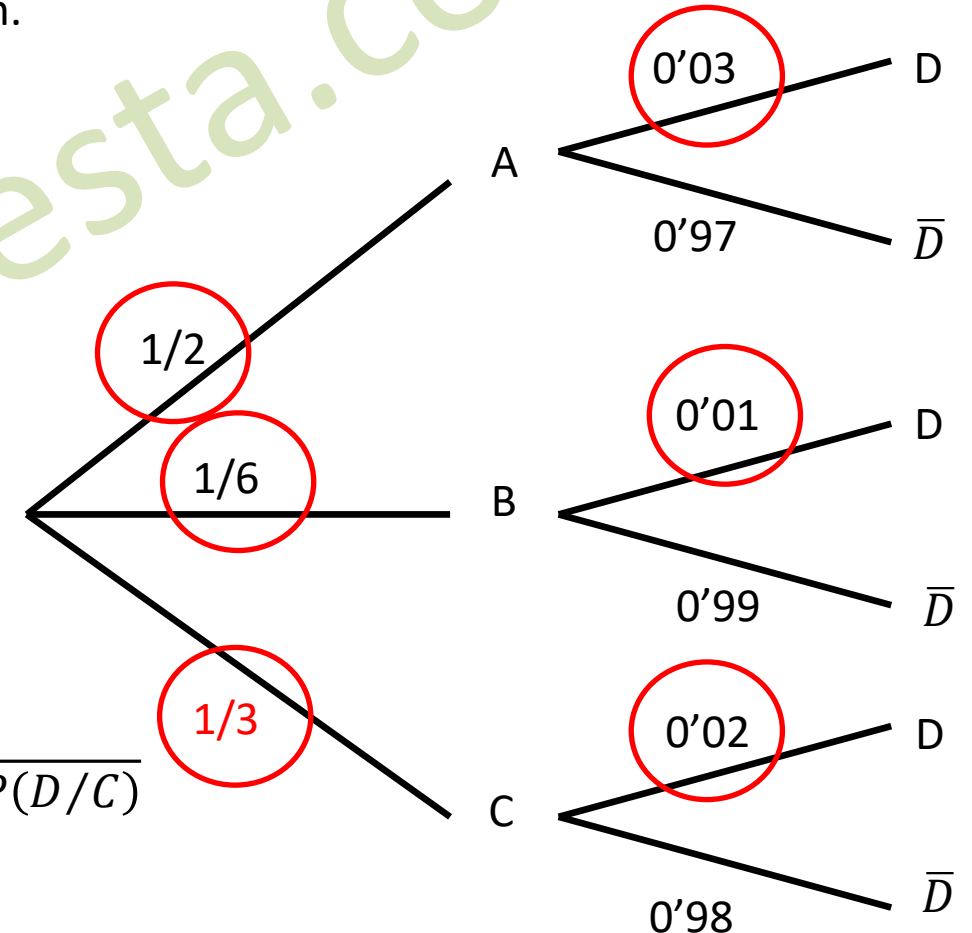
$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

Se representa el diagrama de árbol.

La probabilidad que nos piden es condicionada. Se aplica el teorema de Bayes.

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B) \cdot P(D/B)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)}$$
$$= \frac{\frac{1}{6} \cdot 0'01}{\frac{1}{2} \cdot 0'03 + \frac{1}{6} \cdot 0'01 + \frac{1}{3} \cdot 0'02} \quad \boxed{\approx 0'071}$$



EJERCICIO 4

Tenemos la siguiente tabla que representa a 60 deportistas de la misma edad y relacionamos estatura («x» en metros) y peso («y» en kg):

y \ x	1,70	1,80	1,90
70	3	2	0
80	6	10	4
90	4	11	5
100	1	6	8
	14	29	17

Distribución marginal de x

x	f _x	x·f _x	x ² ·f _x
1'70	14	23'8	333'2
1'80	29	52'2	1513'8
1'90	17	32'3	549'1
	60	108'3	2396'1

- Calcula la distribución marginal de x.
- Calcula media aritmética marginal y varianza marginal de x.
- Calcula la moda marginal de y.
- Podríamos decir que un deportista que pese 80 kg y mida 1,90 es representativo de la muestra?. Justifica la respuesta.

Se aplica la fórmula para calcular la media aritmética:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_x}{N} \longrightarrow \bar{x} = \frac{108'3}{60} = \boxed{1'805}$$

Se aplica la fórmula para calcular la varianza:

$$s_x^2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot f_x}{N} - (\bar{x})^2 \longrightarrow s_x^2 = \frac{2396'1}{60} - (1'805)^2 \approx \boxed{36'7}$$

EJERCICIO 4

Tenemos la siguiente tabla que representa a 60 deportistas de la misma edad y relacionamos estatura («x» en metros) y peso («y» en kg):

y \ x	1,70	1,80	1,90	
70	3	2	0	5
80	6	10	4	20
90	4	11	5	20
100	1	6	8	15

La variable y es **bimodal**: Las modas son 80 y 90.

La respuesta es **NO**. La altura promedio es de 1'805 m de altura, lo cual hace que dicha altura sea excesiva. Además, sólo 4 de los 60 deportistas están en esas medidas, lo cual representa un porcentaje muy pequeño.

c) Calcula la moda marginal de y.

d) Podríamos decir que un deportista que pese 80 kg y mida 1,90 es representativo de la muestra? Justifica la respuesta.

EJERCICIO 5

Tenemos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

- a) Comprueba que $A^2 - B^2$ no es igual para ellas a $(A+B) \cdot (A-B)$
- b) ¿Son conmutables las matrices A y B? Justifícalo a partir del resultado anterior.

Solución:

Para contestar el primer apartado, haremos las operaciones que nos proponen y comprobaremos que no se cumple la relación para matrices. Recordamos que la relación dada, “suma por diferencia igual a diferencia de cuadrados”, si que se cumple en el caso de números y expresiones algebraicas.

$$\left. \begin{aligned} A^2 &= A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \\ B^2 &= B \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \longrightarrow A^2 - B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \\ A - B &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \longrightarrow (A + B) \cdot (A - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 7 & -17 \end{pmatrix}$$

Como se puede comprobar, $A^2 - B^2 \neq (A + B) \cdot (A - B)$

Puedes repasar matrices en mi curso:

Pongo el [link](#) en la descripción del vídeo.

EJERCICIO 5

Tenemos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^2 - B^2$ no es igual para ellas a $(A+B) \cdot (A-B)$

b) ¿Son conmutables las matrices A y B? Justifícalo a partir del resultado anterior.

Solución:

Si se desarrolla matricialmente el producto $(A+B) \cdot (A-B)$, podemos comprobar que si fueran conmutables las matrices A y B respecto del producto, la igualdad se cumpliría.

$$(A + B) \cdot (A - B) = A \cdot A - A \cdot B + B \cdot A - B \cdot B = A^2 - \underbrace{A \cdot B + B \cdot A} - B^2$$

Si las matrices fueran conmutables, se cancelarían ambos términos y se verificaría la igualdad: $A^2 - B^2 = (A + B) \cdot (A - B)$

Y con eso queda demostrado que el producto de las dos matrices **no es conmutativo**.