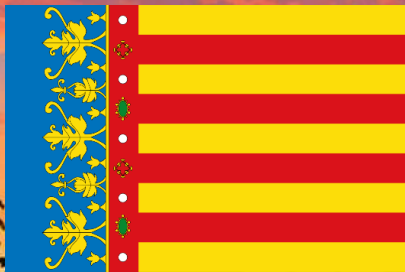


PRUEBA PARA MAYORES DE 20 AÑOS TÍTULO DE BACHILLERATO



COMUNIDAD
VALENCIANA

MATEMÁTICAS
I Y II

CONVOCATORIA 2019





ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.



Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este examen son:

- 1) Matrices.
- 2) Geometría.
- 3) Números complejos.
- 4) Análisis de funciones.
- 5) Cálculo de áreas mediante integrales.



EJERCICIO 1

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) Comprueba que $A^2 - A = I$, donde I = matriz identidad de orden 2.

b) Aprovecha el resultado anterior para calcular A^5 y A^{-1} .

c) Calcula $\det(X)$ si sabemos que $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

Calculo en primer lugar A^2 . $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Calculo $A^2 - A$. $A^2 - A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ **Que es lo que queríamos demostrar.**

Calculo ahora A^5 . $A^5 = A^2 \cdot A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}}$

Aunque podría hacer la matriz inversa de A , prefiero aprovechar el dato del ejercicio tal como proponen.

$$A^2 - A = I \longrightarrow A \cdot \underbrace{(A - I)}_{A^{-1}} = I$$

Podemos calcular la inversa de A . $A^{-1} = A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$

EJERCICIO 1

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

c) Calcula $\det(X)$ si sabemos que $A \cdot X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

Solución:

Aplico las propiedades de los determinantes.

$$|A \cdot X| = \left| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \right| \longrightarrow |A \cdot X| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow |A| \cdot |X| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow |X| = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$|X| = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2}{-1} = \boxed{-2}$$



AQUÍ ESTÁ MI
CURSO DE
MATRICES Y
DETERMINANTES.

EJERCICIO 2

Dada la recta $r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$

a) Encuentra los puntos A y B de r que distan 3 unidades de P (-1,0,1).

b) Calcula el volumen del tetraedro ABPD , donde D (5,1,4)

Solución:

Se toma un punto genérico de la recta r $P_r = (1 - t, 2 + t, t)$

Se calcula la distancia de P_r a P: Vector $\overrightarrow{PP_r} = P_r - P = (1 - t, 2 + t, t) - (-1, 0, 1) = (2 - t, 2 + t, t - 1)$

$$\text{Módulo } \overrightarrow{PP_r} = \sqrt{(2 - t)^2 + (2 + t)^2 + (t - 1)^2}$$

Se iguala a 3 la distancia de P_r a P: $\sqrt{(2 - t)^2 + (2 + t)^2 + (t - 1)^2} = 3$

Se resuelve la ecuación, elevando al cuadrado a ambos lados de la igualdad. $(2 - t)^2 + (2 + t)^2 + (t - 1)^2 = 9$

Desarrollo los cuadrados. $4 - 4t + t^2 + 4 + 4t + t^2 + t^2 - 2t + 1 = 9$

Agrupamos: $3t^2 - 2t = 0$

Se resuelve: $t \cdot (3t - 2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} t_1 = 0 \\ t_2 = 2/3 \end{cases}$

Se calculan los puntos pedidos sustituyendo los valores de t en P_r :

$$t_1 = 0 \longrightarrow A = (1 - 0, 2 + 0, 0) \longrightarrow \boxed{A = (1, 2, 0)}$$

$$t_2 = 2/3 \longrightarrow B = (1 - 2/3, 2 + 2/3, 2/3) \longrightarrow \boxed{B = (1/3, 8/3, 2/3)}$$

EJERCICIO 2

Dada la recta $r: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = t \end{cases}$

b) Calcula el volumen del tetraedro ABPD , donde D (5,1,4)

Solución:

De la resolución del apartado anterior disponemos de los puntos: $A = (1,2,0)$ y $B = \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$
Del enunciado del apartado a) sabemos que $P (-1,0,1)$.

El volumen del tetraedro es: $V = \frac{1}{6} \cdot [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AD}]$ ← PRODUCTO MIXTO

Calculo los vectores: $\overrightarrow{AB} = B - A = \left(\frac{1}{3}, \frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right) - (1,2,0) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (-1,0,1) - (1,2,0) = (-2, -2, 1)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (5,1,4) - (1,2,0) = (4, -1, 4)$$

Calculo el volumen aplicando la fórmula:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -2 & -2 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \frac{58}{3} = \boxed{\frac{29}{9} \text{ unidades de volumen}}$$

EJERCICIO 3

Se dan los números complejos $z = 1_{270^\circ}$ y se pide: a) Da en forma binómica el número $A = \frac{z \cdot w}{z - w}$
 $w = 1 - i$ b) Calcula el módulo de A.

Solución:

Se expresa z en forma binómica. $z = 1 \cdot (\cos 270^\circ + i \cdot \operatorname{sen} 270^\circ) = -i$

Y se sustituye en la expresión dada:

$$A = \frac{z \cdot w}{z - w} = \frac{-i \cdot (1 - i)}{-i - (1 - i)} = \frac{-i + i^2}{-i - 1 + i} = \frac{-1 - i}{-1} = \boxed{1 + i}$$

Se calcula el módulo. $|A| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{2}}$

EJERCICIO 4

Encuentra las asíntotas y dominio de la función $f(x) = \frac{4x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$

Solución:

El dominio de una función racional son todos los números reales excepto los que anulan el denominador. Por ello, igualo el denominador a cero.

$$2x + 1 = 0 \longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

El dominio de $f(x)$ es: $R - \{-1/2\}$

Para estudiar la **asíntota vertical**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo el límite de la función en ese valor de x .

$$\text{En } x = -1/2; \quad \lim_{x \rightarrow -1/2} \frac{4x^2 - 3x + 1}{2x + 1} = \frac{13/2}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1/2^+} \frac{4x^2 - 3x + 1}{2x + 1} = \frac{13/2}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1/2^-} \frac{4x^2 - 3x + 1}{2x + 1} = \frac{13/2}{0^-} = -\infty \end{cases}$$

$x = -1/2$ es A.V. de $f(x)$

EJERCICIO 4

La **asíntota horizontal** se calcula con los límites en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 3x + 1}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 3x + 1}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$$

Por lo tanto, $f(x)$ **no** presenta asíntota horizontal.

Al no tener asíntota horizontal, puede tener una **asíntota oblicua**.

Para calcular la asíntota oblicua, basta con dividir los polinomios. El cociente es igual a la ecuación de la asíntota oblicua.

$$\begin{array}{r} 4x^2 - 3x + 1 \\ -4x^2 - 2x \\ \hline -5x + 1 \\ 5x + 5/2 \\ \hline 7/2 \end{array} \quad \begin{array}{l} 2x + 1 \\ \hline 2x - 5/2 \end{array}$$

Se puede calcular la asíntota oblicua por otro método.

La ecuación de la asíntota oblicua es: $y = 2x - 5/2$

$$f(x) = \frac{4x^2 - 3x + 1}{2x + 1}$$

EJERCICIO 5

Calcula el área del recinto encerrado por las rectas $x=0$, $x=3$, el eje X y la curva $f(x) = \frac{6x^2}{3x+1}$

Solución: Debemos tener en cuenta que $f(x)$ es positiva entre las rectas $x=0$ y $x=3$.

$$\int_0^3 f(x) dx = \int_0^3 \frac{6x^2}{3x+1} dx = \int_0^3 2x - \frac{2}{3} + \frac{2/3}{3x+1} dx = \left[x^2 - \frac{2}{3} \cdot x \right]_0^3 + \frac{2}{3} \cdot \int_0^3 \frac{1}{3x+1} dx =$$

Puesto que el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador, realizaremos la división de los polinomios.

$$= \left[x^2 - \frac{2}{3} \cdot x + \frac{2}{9} \cdot \ln(3x+1) \right]_0^3 = \left(3^2 - \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{2}{9} \cdot \ln(3 \cdot 3 + 1) \right) - \left(0^2 - \frac{2}{3} \cdot 0 + \frac{2}{9} \cdot \ln(3 \cdot 0 + 1) \right) = \left(7 + \frac{2}{9} \cdot \ln(10) \right) - (0) = 7 + \frac{2}{9} \cdot \ln(10)$$

Por lo tanto, el valor del área pedida es $7 + \frac{2}{9} \cdot \ln(10)$

Debemos tener en cuenta la regla de integración: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + C$