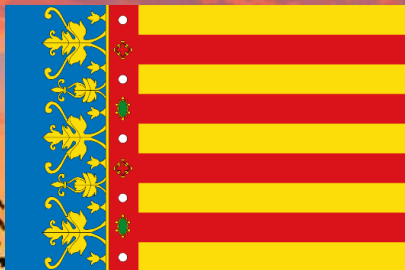


PRUEBA PARA MAYORES DE 20 AÑOS TÍTULO DE BACHILLERATO



COMUNIDAD
VALENCIANA

MATEMÁTICAS
I Y II

CONVOCATORIA 2020





ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.



Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

©Angel Cuesta Arza

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este examen son:

- 1) Análisis de una función racional.
- 2) Cálculo de áreas mediante integrales.
- 3) Geometría.
- 4) Probabilidad.
- 5) Números complejos.



EJERCICIO 1

Se tiene la función $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$

- a) Halla su dominio.
- b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- c) Halla los extremos en $[2, 3]$ y justifícalo.
- d) Halla la ecuación de las asíntotas

Solución:

El dominio de una función racional son todos los números reales excepto los que anulan el denominador. Por ello, igualo el denominador a cero.

$$x^2 - 1 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

El dominio de $f(x)$ es: $R - \{-1, 1\}$

EJERCICIO 1

Se tiene la función $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$

b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Se calcula la derivada.

$$f'(x) = \frac{2 \cdot (x^2 - 1) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x^2 - 2 - 4x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-2x^2 - 2}{(x^2 - 1)^2}$$

Igualamos la derivada a cero:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x^2 - 1)^2} = 0 \longrightarrow -2x^2 - 2 = 0 \longrightarrow x = \pm\sqrt{-1} \longrightarrow x \text{ no pertenece a los reales.}$$

Se estudia el signo de la derivada:

	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$		—	—	—
$f(x)$				

$f(x)$ es **decreciente** en $x \in (-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$ y nunca es creciente.

EJERCICIO 1

Se tiene la función $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$

c) Halla los extremos en $[2, 3]$ y justifícalo.

Puesto que la función es estrictamente decreciente en el intervalo dado, el máximo absoluto se encontrará en $x=2$ y el mínimo absoluto está en $x=3$.

Sustituimos los valores en la función para obtener los puntos.

$$f(2) = \frac{2 \cdot 2}{2^2 - 1} = \frac{4}{3} \quad f(3) = \frac{2 \cdot 3}{3^2 - 1} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

En el intervalo indicado, el **máximo absoluto** será **(2,4/3)** y el **mínimo absoluto** será **(3,3/4)**.

EJERCICIO 1

Se tiene la función $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$

El dominio de $f(x)$ es: $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$

d) Halla la ecuación de las asíntotas

Para estudiar las **asíntotas verticales**, nos fijamos en los puntos que están fuera del dominio. En ellos es posible que haya asíntotas verticales.

Calculo los límites de la función en esos valores de x y lo comprobamos.

$$\text{En } x=1; \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{2}{0^-} = -\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = 1 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

$$\text{En } x=-1; \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{-2}{0} \longrightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x}{x^2 - 1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{cases}, \text{ luego } \boxed{x = -1 \text{ es A.V. de } f(x)}$$

Los valores de los límites laterales nos aportan información para poder representar más fácilmente la función.

EJERCICIO 1

Se tiene la función $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 1}$

d) Halla la ecuación de las asíntotas

La **asíntota horizontal** se calcula con el límite en infinito.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x} = 0$$

Por lo tanto, $y=0$ es asíntota horizontal de $f(x)$.

EJERCICIO 2

Calcula el área comprendida por las rectas $x=0$, $x= \pi/2$, el eje X y la curva $y = \sin 2x$

Solución: Debemos tener en cuenta que $f(x)=\sin 2x$ es positiva entre las rectas $x=0$, $x= \pi/2$

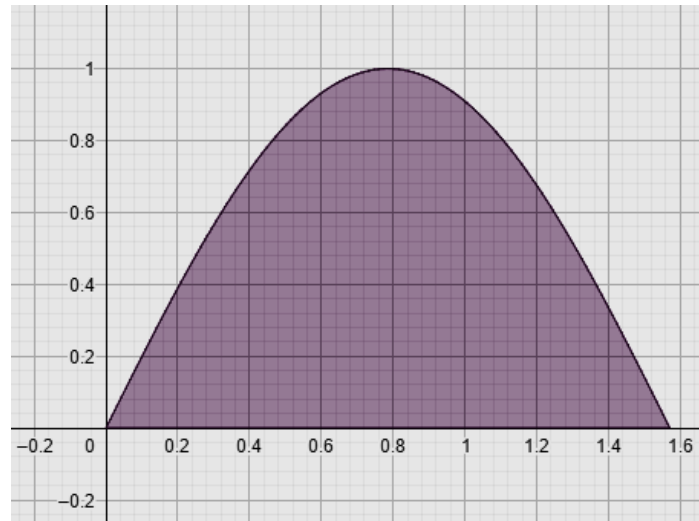
$$\int_0^{\pi/2} f(x)dx = \int_0^{\pi/2} \sin(2x)dx = \int_0^{\pi/2} \frac{2}{2} \cdot \sin(2x)dx = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} 2 \cdot \sin(2x)dx = \frac{1}{2} \cdot [-\cos(2x)]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \left[\cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) - \cos(2 \cdot 0) \right] = \frac{-1}{2} \cdot (-1 - 1) = 1$$

Debemos tener en cuenta la regla de integración: $\int f'(x) \cdot \sin(f(x)) dx = -\cos(f(x)) + C$

Por lo tanto, el valor del **área pedida es 1** .

Se representa gráficamente con fines pedagógicos.



EJERCICIO 3

Considera el plano π : $2x - y + z = 1$. Se pide:

- a) Su distancia al origen O (0,0,0)
- b) Las coordenadas de los puntos A,B,C de intersección de π con los ejes X,Y,Z
- c) El volumen del tetraedro de vértices O,A,B,C

Solución:

La distancia de un punto a un plano se calcula con la fórmula:
$$d(P, \pi) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Se escribe el plano π : $2x - y + z - 1 = 0$.
$$d(P, \pi) = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|-1|}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \text{ unidades}$$

Por lo tanto, la distancia **pedida** es $\frac{1}{\sqrt{6}}$ **unidades**

EJERCICIO 3

Considera el plano π : $2x - y + z = 1$. Se pide:

b) Las coordenadas de los puntos A,B,C de intersección de π con los ejes X,Y,Z

El eje X tiene por ecuaciones en forma paramétrica: $r: \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Se sustituye en la ecuación del plano. $2 \cdot \alpha - 0 + 0 = 1 \longrightarrow \alpha = \frac{1}{2} \longrightarrow A = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$

El eje Y tiene por ecuaciones en forma paramétrica: $s: \begin{cases} x = 0 \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{cases}$

Se sustituye en la ecuación del plano. $2 \cdot 0 - \alpha + 0 = 1 \longrightarrow \alpha = -1 \longrightarrow B = (0, -1, 0)$

El eje Z tiene por ecuaciones en forma paramétrica: $t: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$

Se sustituye en la ecuación del plano. $2 \cdot 0 - 0 + \alpha = 1 \longrightarrow \alpha = 1 \longrightarrow C = (0, 0, 1)$

EJERCICIO 3

Considera el plano π : $2x - y + z = 1$. Se pide:

c) El volumen del tetraedro de vértices O,A,B,C $A = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$ $B = (0, -1, 0)$ $C = (0, 0, 1)$

Para calcular el volumen del tetraedro a partir de los vértices A,B,C y O , debemos calcular los vectores $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ y $\overrightarrow{OC}$. Al partir los vectores desde el origen de coordenadas, sus componentes coinciden con los puntos.

$$\overrightarrow{OA} = \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \overrightarrow{OB} = (0, -1, 0) \text{ y } \overrightarrow{OC} = (0, 0, 1)$$

Se calcula el volumen del tetraedro con la fórmula correspondiente. $V = \frac{1}{6} \overrightarrow{OA} \cdot (\overrightarrow{OB} \times \overrightarrow{OC}) = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} \overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OC} \end{vmatrix}$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 0'5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot |-0'5| = \frac{1}{12} \text{ u.v.}$$

Por lo tanto, el volumen **pedido es 1/12 unidades de volumen.**

PRODUCTO MIXTO

EJERCICIO 4

En una fábrica de ropa hay 3 líneas de producción, pero se observa que algunas piezas tienen defectos. La primera línea fabrica los $\frac{2}{5}$ de la producción y un 98% de piezas son buenas. La segunda línea fabrica los $\frac{2}{10}$ de la producción y tan solo un 1% de piezas son defectuosas. El resto de la producción se fabrica en la tercera línea con un 3% de piezas defectuosas. Si tenemos en la mano una pieza defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en la segunda línea?

Solución:

Se calcula en primer lugar la probabilidad de que una prenda de ropa haya sido fabricada en la tercera fábrica.

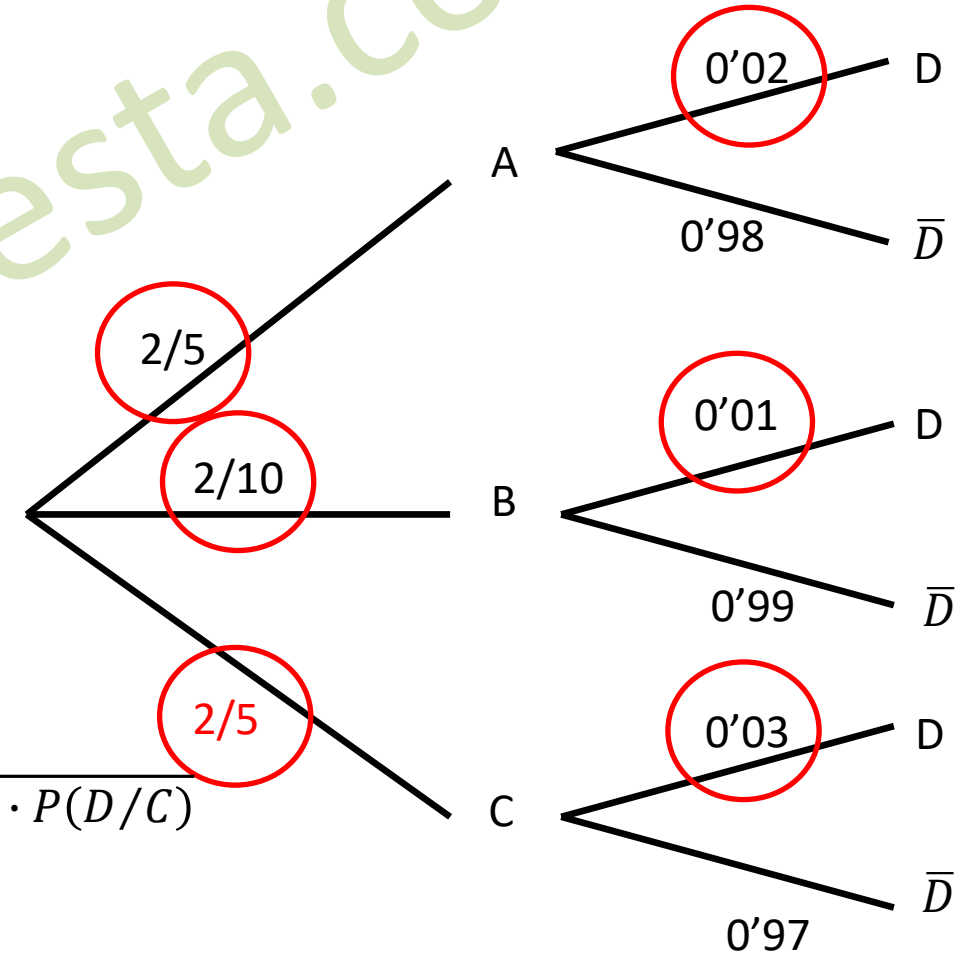
$$P(A) + P(B) + P(C) = 1$$

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1 - \frac{2}{5} - \frac{2}{10} = \frac{2}{5}$$

Se representa el diagrama de árbol.

La probabilidad que nos piden es condicionada. Se aplica el teorema de Bayes.

$$P(B/D) = \frac{P(B \cap D)}{P(D)} = \frac{P(B) \cdot P(D/B)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C)}$$
$$= \frac{\frac{2}{10} \cdot 0'01}{\frac{2}{5} \cdot 0'02 + \frac{2}{10} \cdot 0'01 + \frac{2}{5} \cdot 0'03} \approx \boxed{0'09}$$



EJERCICIO 5

Se dan los números complejos $u = 1 - i$ y $v = 2 + i$ y se pide:

- a) El número complejo $z = u \cdot v$
- b) El módulo de v y el de z .
- c) El número $w = u^4$ en forma polar.
- d) El número $\alpha = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$ en forma binómica.

Solución:

Se multiplican los dos número complejos. $u \cdot v = (1 - i) \cdot (2 + i) = 2 + i - 2i - i^2 = 2 + i - 2i + 1 = \boxed{3 - i}$

Se calculan los módulos. $|v| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \boxed{\sqrt{5}}$ $|z| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \boxed{\sqrt{10}}$

Se expresa u en forma polar. Para ello, calculo su módulo y su argumento. Tenemos en cuenta que sobre el plano complejo pertenece al **cuarto cuadrante** (parte real positiva, parte imaginaria negativa).

$$|u| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} \quad \tan(\theta) = \frac{-1}{1} = -1 \longrightarrow \theta = -45^\circ = 315^\circ$$

$$w = u^4 = (\sqrt{2}_{315^\circ})^4 = (\sqrt{2})^4_{4 \cdot 315^\circ} = 4_{1260^\circ} = \boxed{4_{180^\circ}}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{v+u}{u \cdot v} = \frac{v+u}{z} = \frac{2+i+1-i}{3-i} = \frac{3}{3-i} \\ &= \frac{3}{3-i} = \frac{3}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{3 \cdot (3+i)}{9-i^2} = \frac{9+3i}{10} = \boxed{\frac{9}{10} + \frac{3}{10}i} \end{aligned}$$