El problema del día

Selectividad C. Valenciana
Matemáticas II
Opción A, Problema 1
Julio 2019

Discusión y Resolución de un Sistema Lineal de Ecuaciones

El Enunciado

Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x + \quad\quad 3z = \boldsymbol{\alpha} \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z \ = \boldsymbol{\alpha} + 1 \end{cases}$

Donde $\boldsymbol{\alpha}$ es un parámetro real. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) Los valores del parámetro $\boldsymbol{\alpha}$ para los que el sistema es compatible y determinado.

b) Las soluciones del sistema cuando $\boldsymbol{\alpha}$=-1

c) El valor de $\boldsymbol{\alpha}$ para que el sistema tenga solución que verifique x+y+z=0

Discusión del Sistema

$$\begin{cases} 2x + \quad\quad 3z = \boldsymbol{\alpha} \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z \ = \boldsymbol{\alpha} + 1 \end{cases}$$

Se utilizará para ello el **teorema de Rouché**

Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \text{ y } \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & \boldsymbol{\alpha} \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \boldsymbol{\alpha + 1} \end{pmatrix}$$

Calculo del rango de A utilizando su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -20 - 3 + 18 + 4 = -1 \neq 0 \rightarrow Ran(A) = 3$$

Lo cual implica que $Ran(A^*) = 3$ ya que el Rango de la matriz ampliada siempre tiene un rango mayor o igual que la matriz de los coeficientes.

Se verifica por lo tanto que $Ran(A) = Ran(A^*) = nº\ incógnitas = 3$, lo cual implica, según el teorema de Rouché que **<u>el Sistema dado es Compatible Determinado</u>** para todo valor de $\boldsymbol{\alpha}$.

a) Los valores del parámetro $\boldsymbol{\alpha}$ para los que el sistema es compatible y determinado.

Resolución del Sistema

Al sustituir el valor de $\boldsymbol{\alpha}$=-1 ; $\begin{cases} 2x + \quad\quad 3z = -1 \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases}$

Podemos utilizar para resolver el sistema la regla de Cramer o el método de Gauss. En este caso, utilizaré la regla de Cramer.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{-1} & 0 & 3 \\ \mathbf{5} & -2 & 2 \\ \mathbf{0} & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-7}{-1} = 7 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \mathbf{-1} & 3 \\ 1 & \mathbf{5} & 2 \\ 3 & \mathbf{0} & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & \mathbf{-1} \\ 1 & -2 & \mathbf{5} \\ 3 & -1 & \mathbf{0} \end{vmatrix}}{-1} = \frac{5}{-1} = -5$$

Por tanto la solución del sistema es: **x=7; y=-4; z=-5**

Puedes comprobarlo sustituyendo en cualquiera de las 3 ecuaciones del sistema.

b) Las soluciones del sistema cuando α=-1

Resolviendo el sistema sobredeterminado

Al agregar una ecuación se obtiene un sistema de 4 ecuaciones y 3 incógnitas.

Puesto que el sistema debe tener solución única, debe ser **compatible determinado.**

En este caso, lo más fácil es obtener la solución del sistema inicial en función de $\boldsymbol{\alpha}$ y después sustituirlo en la ecuación dada. El valor de $\boldsymbol{\alpha}$ que cumpla la ecuación, será el que nos proporcione las soluciones del sistema.

El sistema original es: $\begin{cases} 2x + \ 3z = \boldsymbol{\alpha} \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \boldsymbol{\alpha + 1} \end{cases}$

Lo resolveré en función de $\boldsymbol{\alpha}$ utilizando la regla de Cramer.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} \boldsymbol{\alpha} & 0 & 3 \\ \boldsymbol{5} & -2 & 2 \\ \boldsymbol{\alpha+1} & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-2\alpha - 9}{-1} = 2\boldsymbol{\alpha} + 9 \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \boldsymbol{\alpha} & 3 \\ 1 & \boldsymbol{5} & 2 \\ 3 & \boldsymbol{\alpha+1} & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & \boldsymbol{\alpha} \\ 1 & -2 & \boldsymbol{5} \\ 3 & -1 & \boldsymbol{\alpha+1} \end{vmatrix}}{-1} = \frac{\boldsymbol{\alpha}+6}{-1} = -\boldsymbol{\alpha} - 6$$

c) El valor de $\boldsymbol{\alpha}$ para que el sistema tenga solución que verifique x+y+z=0

Resolviendo el sistema sobredeterminado

Para asegurarnos de que el sistema de ecuaciones verifica la ecuación del enunciado, se sustituye la solución en la ecuación dada: **x+y+z=0**

$2\boldsymbol{\alpha}+9-4-\boldsymbol{\alpha}-6=0 \longrightarrow \boldsymbol{\alpha}=1;$

Luego, el valor pedido es $\boldsymbol{\alpha}=1$.

Teniendo en cuenta que:

$x = 2\boldsymbol{\alpha} + 9$

$y = -4$

$z = -\boldsymbol{\alpha} - 6$

c) El valor de α para que el sistema tenga solución que verifique x+y+z=0