El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas II

Opción B, Problema 1

Julio 2019

Algebra Matricial

El Enunciado

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **obtener de forma razonada y explicando todos los pasos:**

a) Los valores de $\boldsymbol{\alpha}$ para los que la ecuación matricial $A * X = \boldsymbol{\alpha} * X$ sólo admite una solución.
b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $A * X = 5 * X$
c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $A * X = 2 * X$ y , sin calcular la matriz A^{100} , obtener el valor de β tal que $A^{100} * \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta * \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Resolviendo en función de $\boldsymbol{\alpha}$ un sistema homogéneo

Operamos las matrices dadas: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x+4y \\ -x+6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} * x \\ \boldsymbol{\alpha} * y \end{pmatrix}$

Al ser las dos matrices iguales, sus términos a_{ij} deben coincidir, por ello podemos escribir: $\begin{cases} x+4y = \boldsymbol{\alpha} * x \\ -x+6y = \boldsymbol{\alpha} * y \end{cases}$

Reordenando el sistema de ecuaciones obtenemos: $\begin{cases} (1-\boldsymbol{\alpha})x + 4y = 0 \\ -x + (6-\boldsymbol{\alpha})y = 0 \end{cases}$

Este es un tipo especial de sistema de ecuaciones, se llama **HOMOGÉNEO.**

Un sistema Homogéneo es Compatible Determinado, según el teorema de Rouché-Fröbenius, cuando el Rango de la matriz de los coeficientes es **igual** al número de incógnitas (en este caso, 2).

Se define A: $A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & 4 \\ -1 & 6-\alpha \end{pmatrix}$

Se calcula el rango de la matriz A en función de α y se discute el sistema.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-\alpha & 4 \\ -1 & 6-\alpha \end{vmatrix} = (1-\alpha)(6-\alpha) + 4 = 0 \to \begin{cases} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} Si\ \alpha \neq 2\ y\ \alpha \neq 5 \to Ran(A) = 2 \\ Si\ \alpha = 2\ o\ \alpha = 5 \to Ran(A) = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, el Sistema será Compatible Determinado para todos los números Reales, excepto el 2 y el 5.

Solución: $\boldsymbol{\alpha} \in \boldsymbol{R} - \{\mathbf{2}, \mathbf{5}\}$

Resolviendo un sistema compatible indeterminado

Se opera al igual que el apartado anterior: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \boldsymbol{\alpha} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + 4y \\ -x + 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha} * x \\ \boldsymbol{\alpha} * y \end{pmatrix}$

Puesto que $\boldsymbol{\alpha}$ **=5,** podemos escribir el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + 4y = 5x \\ -x + 6y = 5y \end{cases}$

Reordenando: $\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$; se observa que las dos ecuaciones son proporcionales.

Por ello, el sistema es Compatible Indeterminado. Obtenemos las infinitas soluciones asignando un parámetro a una de las incógnitas.

Sustituyendo y despejando de –x+y=0: $x = \lambda \rightarrow -\lambda + y = 0 \rightarrow y = \lambda$

Solución: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$; donde $\lambda \epsilon R$

Comenzando el método de inducción

Para resolver la primera parte del ejercicio basta con operar y comprobar que llegamos a la solución pedida.

$$A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 4\\-1 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1*4+4*1\\-1*4+6*1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2*4\\2*1\end{pmatrix}\rightarrow\boxed{\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}}$$

Para la segunda parte del ejercicio, aplicaremos el método de inducción ya que no nos permiten calcular la matriz A^{100} .

Para n=1; $A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

Para n=2; $A^2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=AA\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=A\,2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=2A\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=2*2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=2^2\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

Ahora demostraremos por inducción que: $A^n\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}=2^n\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

Aplicando el método de inducción

Ahora aplico el método de inducción:

Sabiendo que se cumple para n=1, suponemos que se cumple para n;

$A^n \binom{4}{1} = 2^n \binom{4}{1}$.

Debemos comprobar que se cumple para n+1 ; $A^{n+1} \binom{4}{1} = 2^{n+1} \binom{4}{1}$

Desarrollamos la primera parte de la igualdad tratando de llegar a la segunda.

$$A^{n+1} \binom{4}{1} = AA^n \binom{4}{1} = A2^n \binom{4}{1} = 2^n A\binom{4}{1} = 2^n 2\binom{4}{1} = 2^{n+1} \binom{4}{1}$$

Como se puede comprobar, se ha demostrado para n+1 la proposición, por lo que queda probada por inducción la expresión: $A^n \binom{4}{1} = 2^n \binom{4}{1}$

Por ello para n=100; $A^{100} \binom{4}{1} = 2^{100} \binom{4}{1} \rightarrow \beta = 2^{100}$