El problema del día

Selectividad C. Valenciana
Matemáticas II
Opción A, Problema 2
Julio 2019

Geometría

El Enunciado

Se tienen el plano $\pi: 2x + y + 2z = 8$ y el punto P=(10,0,10).

Obtener razonadamente, explicando todos los pasos utilizados:

a) La distancia del punto P al plano π
b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas.
c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C.

Cálculo de distancia de un punto a un plano

Se tienen el plano $\boldsymbol{\pi}: \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} + \mathbf{2}\boldsymbol{z} = \mathbf{8}$ y el punto **P=(10,0,10).**

El método más fácil y directo consiste en aplicar la fórmula correspondiente.

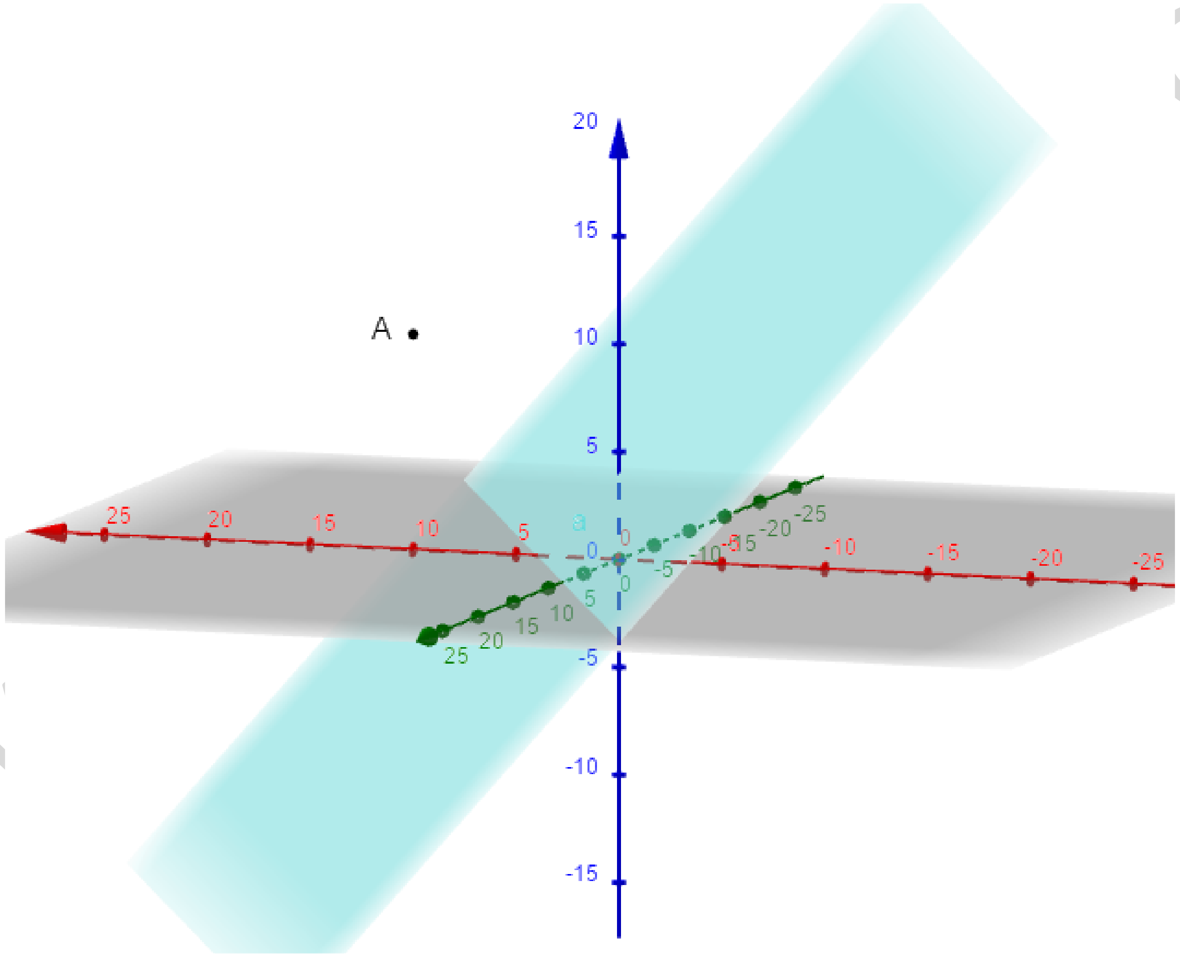
$$d_{P\pi} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Con los datos del ejercicio:

$$d_{P\pi} = \frac{|2 * 10 + 1 * 0 + 2 * 10 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \boxed{\frac{\mathbf{32}}{\mathbf{3}}\ \boldsymbol{u.l.}}$$

a) La distancia del punto P al plano π

Representación gráfica



Intersección del plano con los ejes de coordenadas

Las ecuaciones de los ejes de coordenadas son:

$$Eje\ X\colon \begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \ ;\ Eje\ Y\colon \begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases} \ ;\ Eje\ Z\colon \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$$

Sustituyendo cada ecuación en la ecuación del plano, obtendremos los puntos de intersección correspondientes.

Eje X con π: 2*λ+1*0+2*0-8=0 → λ=4 → A=(4,0,0)

Eje Y con π: 2*0+1*λ+2*0-8=0 → λ=8 → B=(0,8,0)

Eje Z con π: 2*0+1*0+2*λ-8=0 → λ=4 → C=(0,0,4)

A partir de los puntos A, B y C, podemos calcular los vectores $\overrightarrow{AB}\ y\ \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB}$=B-A=(0,8,0)-(4,0,0)=(-4,8,0)

$\overrightarrow{AC}$=C-A=(0,0,4)-(4,0,0)=(-4,0,4)

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas.

Cálculo del área del triángulo

Lo más fácil es aplicar la fórmula correspondiente:

$$A_{triángulo} = \frac{1}{2} * \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|$$

Calculo primero el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 32\vec{i} + 16\vec{j} + 32\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB}$=B-A=(0,8,0)-(4,0,0)=(-4,8,0)
$\overrightarrow{AC}$=C-A=(0,0,4)-(4,0,0)=(-4,0,4)

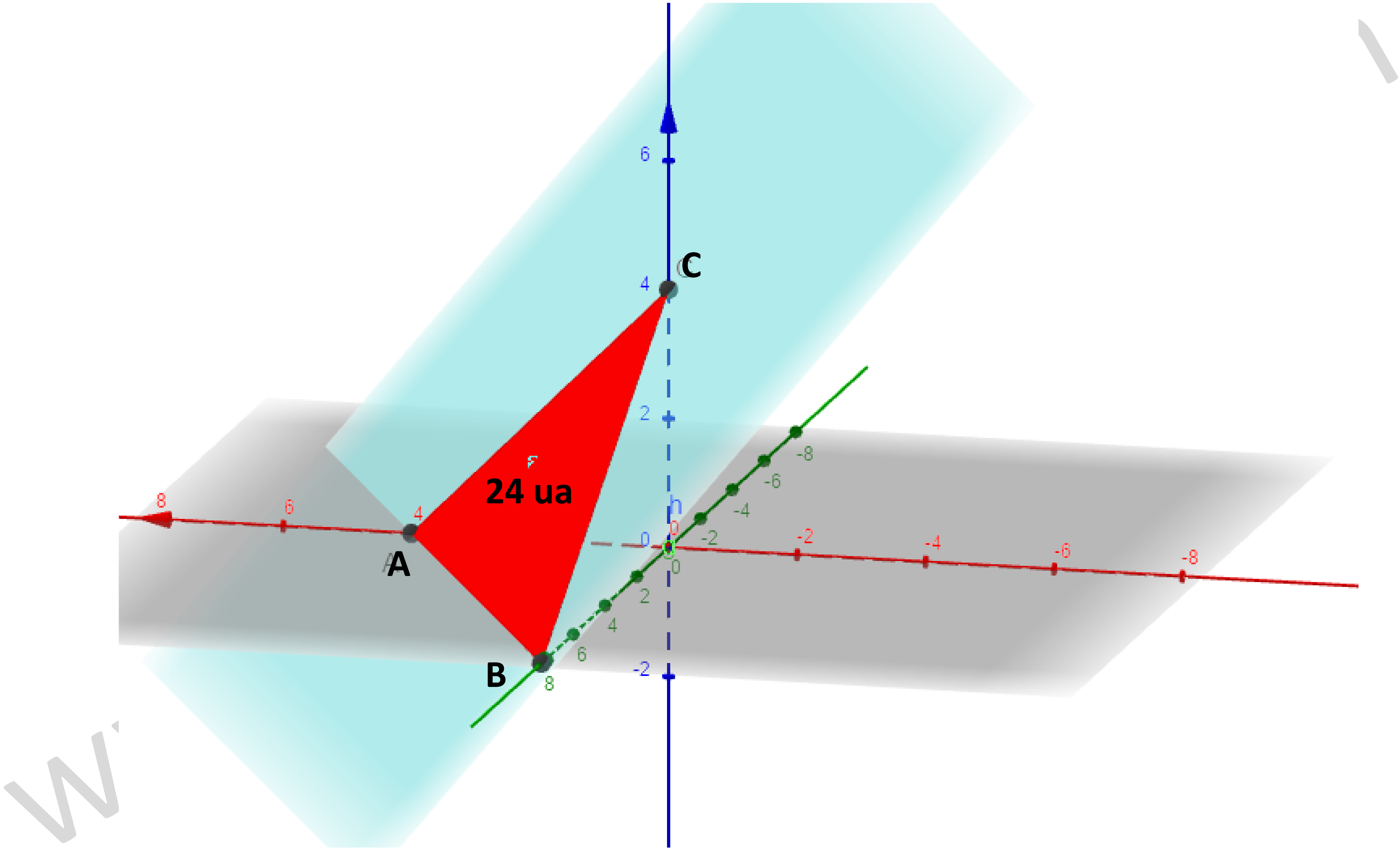
Calculo el módulo:

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{32^2 + 16^2 + 32^2} = 48$$

Siendo el área: $A_{triángulo} = \frac{1}{2} * 48 = \boxed{24\, u.a.}$

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas.

Área del Triángulo



Cálculo del volumen del tetraedro

Lo más fácil es aplicar la fórmula correspondiente, utilizando el producto mixto:

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6} * [\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CP}]$$

Calculo los vectores $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}\ y\ \overrightarrow{CP}$:

$\overrightarrow{AP} = P - A = (10,0,10) - (4,0,0) = (6,0,10)$

$\overrightarrow{BP} = P - B = (10,0,10) - (0,8,0) = (10,-8,10)$

$\overrightarrow{CP} = P - C = (10,0,10) - (0,0,4) = (10,0,6)$

Calculo el producto mixto:

$$[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CP}] = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 10 & -8 & 10 \\ 10 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -8 * \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = -8 * (36 - 100) = 512$$

Siendo el volumen:

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6} * 512 = \boxed{\frac{256}{3}\ u.v.}$$

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C.

Volumen del tetraedro