El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas II

Opción B, Problema 2

Julio 2019

Geometría Euclidiana

El Enunciado

Se dan en el espacio la recta $r: \frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ y el plano $\pi: x + 2y + 3z = 6$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β.

b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando α=6 y β=3.

c) La ecuación del plano que pasa por (0,0,0) y no corta al plano π.

Posición relativa entre la recta y el plano

Las posiciones relativas posibles entre recta y plano son: paralelas, secantes, recta contenida en el plano.

Aunque hay muchas formas de resolver este ejercicio, hoy sólo haré una de ellas.

Un método práctico y mecánico de obtener la posición relativa es mediante el análisis del sistema formado por las ecuaciones implícitas de la recta y la ecuación del plano.

Para ello, obtenemos las ecuaciones implícitas de la recta a partir de su forma continua.

$$r: \frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{x-\alpha}{-1} = \dfrac{y}{-4} \rightarrow -4x + 4\alpha = -y \rightarrow -4x + y = -4\alpha \\ \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z}{\beta} \rightarrow \beta y = -4z \rightarrow \beta y + 4z = 0 \end{cases}$$

Quedando las ecuaciones implícitas de la recta: $r: \begin{cases} -4x + y = -4\alpha \\ \beta y + 4z = 0 \end{cases}$

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β.

Posición relativa entre la recta y el plano

Formamos ahora el sistema de ecuaciones con la recta r y el plano π: $\begin{cases} -4x + y = -4\alpha \\ \beta y + 4z = 0 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$

Lo discutiremos en función de α y β utilizando el teorema de Rouché.

Defino: $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & -4\alpha \\ 0 & \beta & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Calculo el rango de A:

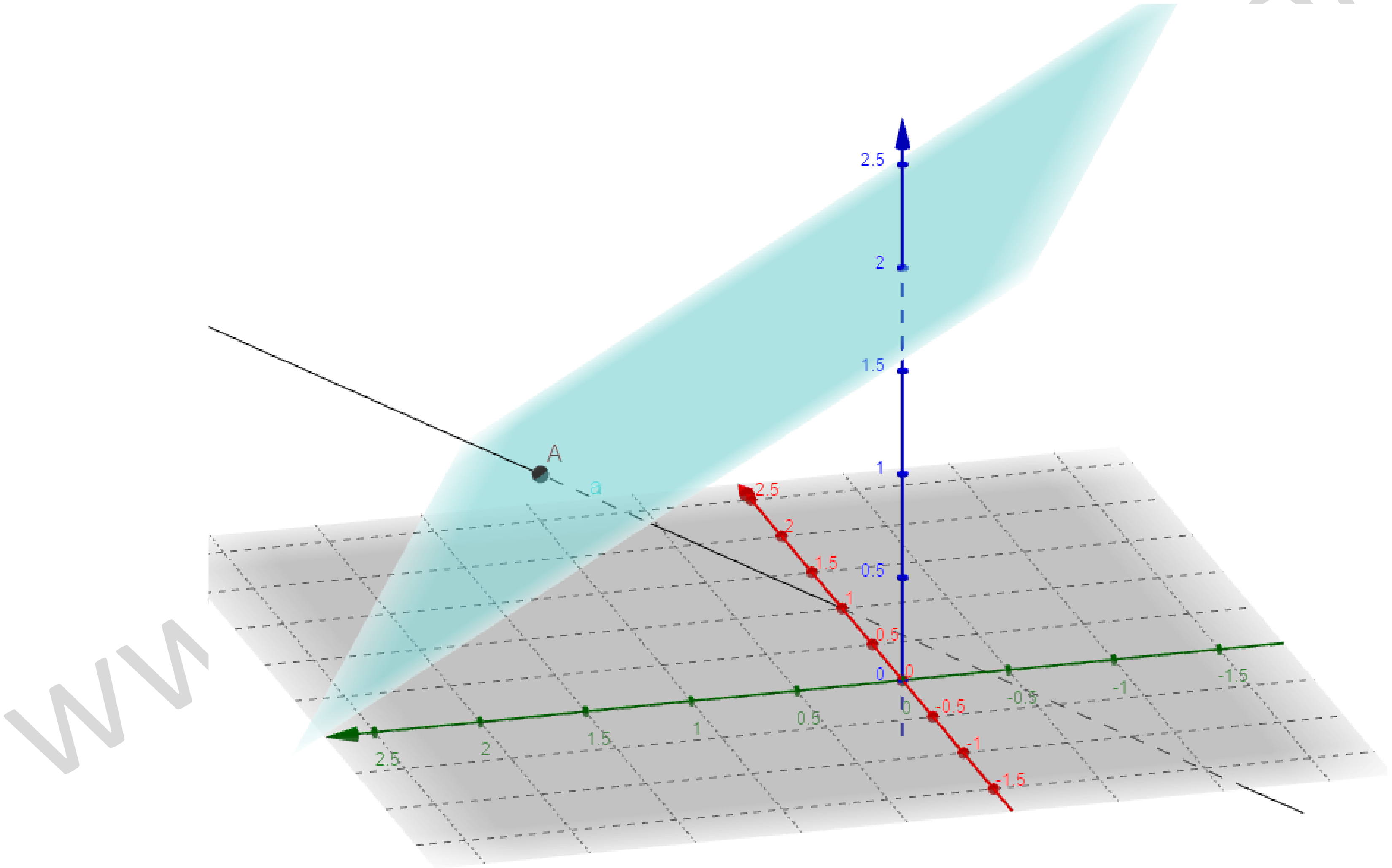
$|A| = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12\beta + 36; -12\beta + 36 = 0;$ β=3.

Si β≠3, el rango de A es 3. Ello obliga a que el rango de A^* sea también 3. Por ello, según el teorema de Rouché, <u>el sistema es compatible determinado</u> y **la recta y el plano serían secantes.**

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β.

Ejemplo de recta y plano secantes

Para **α=1 y β=-2** he hecho la representación gráfica. En ella se puede ver que recta y plano son secantes. (Hay infinitas combinaciones más para **α y β**).



Posición relativa entre la recta y el plano

Si **β=3**, se calcula el rango de A utilizando un menor de la matriz.

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow Ran(A) = 2$$

Ahora calculo el rango de la matriz ampliada, A^*. Se orla la matriz y se hace el determinante (previamente se ha sustituido β=3).

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4\alpha \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -4\alpha + 24;\ -4\alpha + 24 = 0;\ \alpha = 6.$$

Si α≠6→Ran(A)=2; Ran(A^*)=3→El sistema es incompatible y la recta y el plano son **paralelas.**

Si α=6→Ran(A)=2; Ran(A^*)=2<número de incógnitas → El sistema es compatible indeterminado y **la recta está contenida en el plano**.

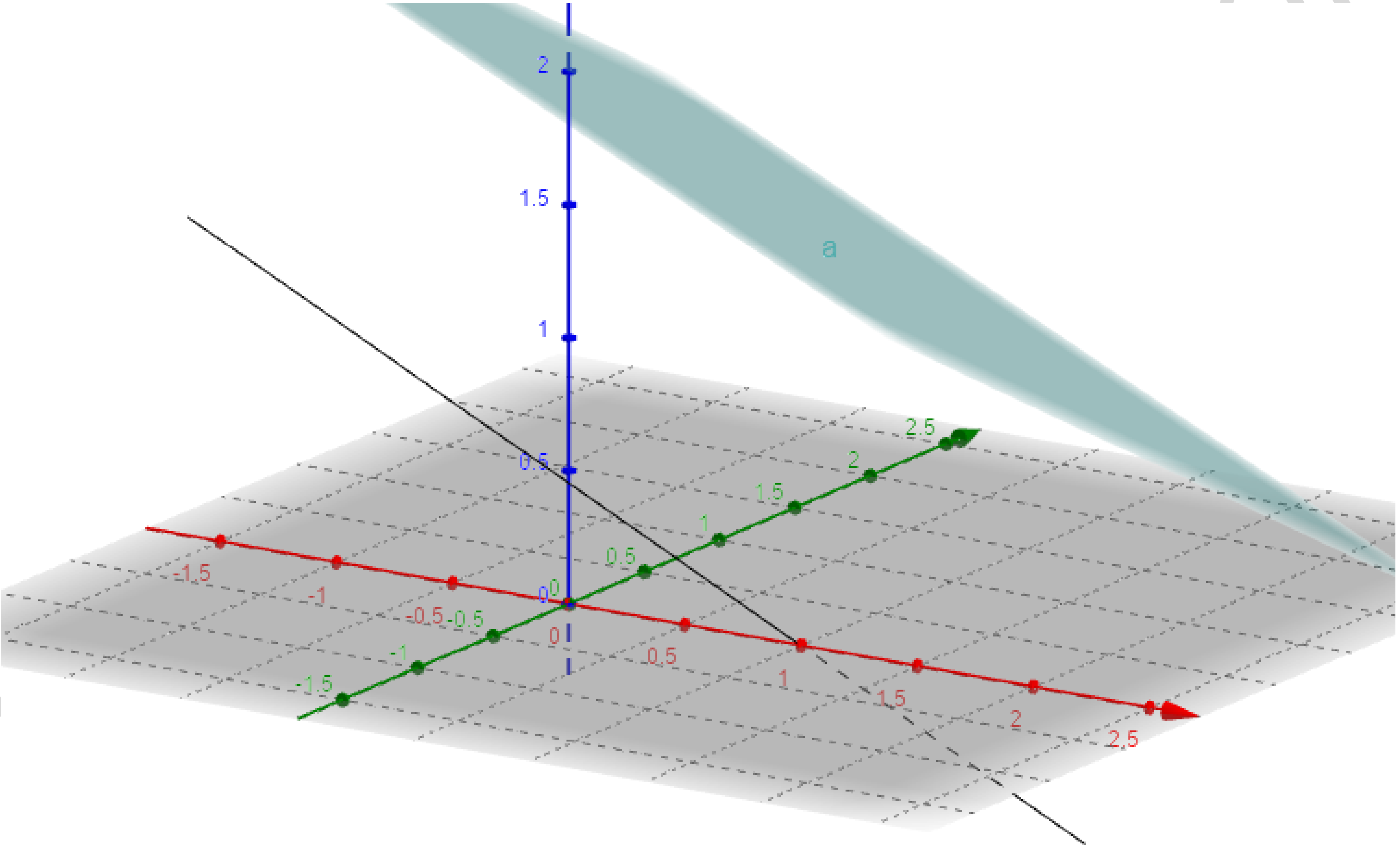
Solución:

β≠3	$\forall \alpha \epsilon R$	**La recta y el plano son SECANTES.**
β=3	α≠6	La recta y el plano son PARALELOS.
	α=6	La recta está CONTENIDA en el plano.

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β.

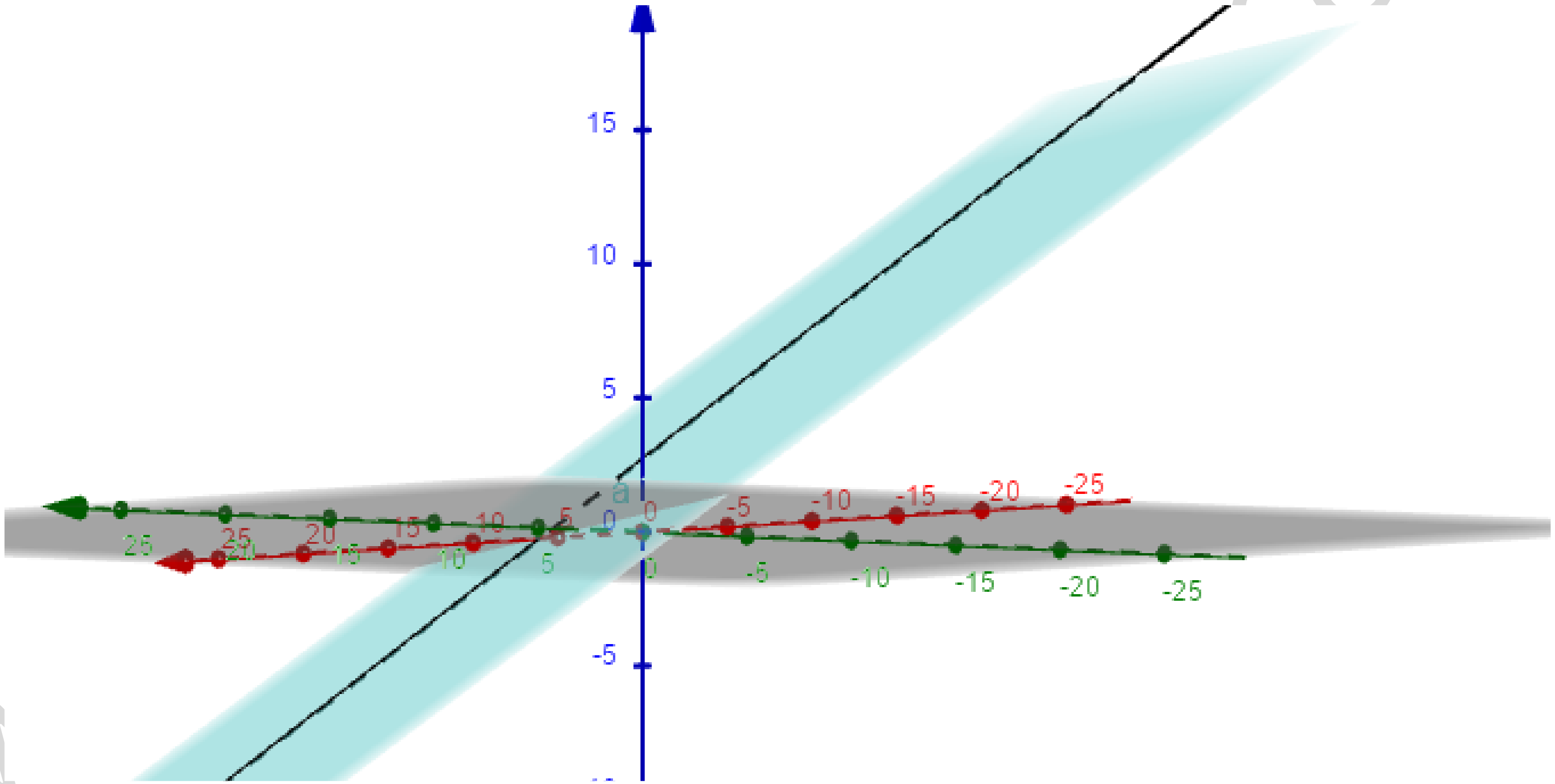
Ejemplo de recta y plano paralelos

Para **α=1 y β=3** he hecho la representación gráfica. En ella se puede ver que recta y plano son paralelos. (Hay infinitas combinaciones más para **α**).



Recta contenida en el plano

Para **α=6 y β=3** he hecho la representación gráfica. En ella se puede ver que la recta está contenida en el plano.



Distancia y ecuación del plano.

Para los valores dados en el apartado b) la recta está contenida en el plano, por ello la distancia entre la recta y el plano es **CERO**.

En el apartado c) el plano pedido debe ser <u>paralelo</u> a π puesto que no se cortan.

Por ello tienen el mismo vector normal y escribiremos: σ: $x+2y+3z=D$.

Para calcular D, basta con sustituir el punto (0,0,0) en el plano y despejar D.

$0+2*0+3*0=D \rightarrow D=0$

Por lo que la ecuación del plano pedido será: **σ:$x+2y+3z=0$**