El problema del día

Selectividad C. Valenciana
Matemáticas II
Opción A, Problema 3
Julio 2019

Análisis de funciones
Cálculo de áreas mediante integración

El Enunciado

Se da la función real h definida por $h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio de la función h. $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0} h(x)$

b) La asíntota de la curva y=h(x).

c) La primitiva de la función h y el área de la superficie encerrada entre las rectas y=0, x=1, x=5 y la curva y=h(x).

Dominio y Límites

Para calcular el dominio de $h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$ basta con igualar a cero el denominador.

$x^2 + 2x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2} = \nexists$; por lo que **Dom h(x)=R**.

Calculo los límites pedidos:

$\lim_{x\to\infty} h(x)$= $\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x\to\infty} x = +\infty$

$\lim_{x\to 0} h(x)$= $\lim_{x\to 0} \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = \frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{5}}$

Cálculo de la Asíntota Oblicua

Puesto que el dominio de la función son todos los números reales, la función no tiene **asíntota vertical**.

Puesto que el límite de la función en el infinito es igual a infinito, la función no tiene **asíntota horizontal**.

Dado que el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, la función tendrá una **asíntota oblicua**.

Para calcularla hay dos métodos. Utilizaremos el más directo, que es resolución de la división. El cociente será la asíntota oblicua.

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2+5x-3 & x^2+2x+5 \\ \underline{-x^3-2x^2-5x} & \overline{x-1} \\ -x^2 \quad -3 & \\ \underline{x^2+2x+5} & \\ 2x+2 & \end{array} \quad siendo \quad \boxed{\boldsymbol{y = x - 1 \; la\ asíntota\ oblicua}}$$

También se puede hacer por el método de la fórmula: $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \quad n = \lim_{x\to\infty} f(x) - mx$

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^3+2x^2+5x} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} - x = -1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = mx + n \\ y = x - 1 \end{array}}$$

Cálculo de la primitiva

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2+5x-3 & x^2+2x+5 \\ \underline{-x^3-2x^2-5x} & x-1 \\ -x^2\quad -3 & \\ \underline{x^2+2x+5} & \\ 2x+2 & \end{array}$$

A partir de la división hecha en el apartado anterior:

$h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = x - 1 + \frac{2x+2}{x^2+2x+5}$, lo que nos permite escribir:

$\int h(x)\,dx = \int \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}\,dx = \int x - 1 + \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx$, y ahora podemos integrar sumando a sumando ya que todas las integrales son inmediatas.

$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c_1$; $\int 1 dx = x + c_2$; $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx = \ln(x^2+2x+5) + c_3$

Siendo la solución: $\boldsymbol{\int h(x)\,dx = \frac{x^2}{2} - x + ln\left(x^2+2x+5\right) + C}$

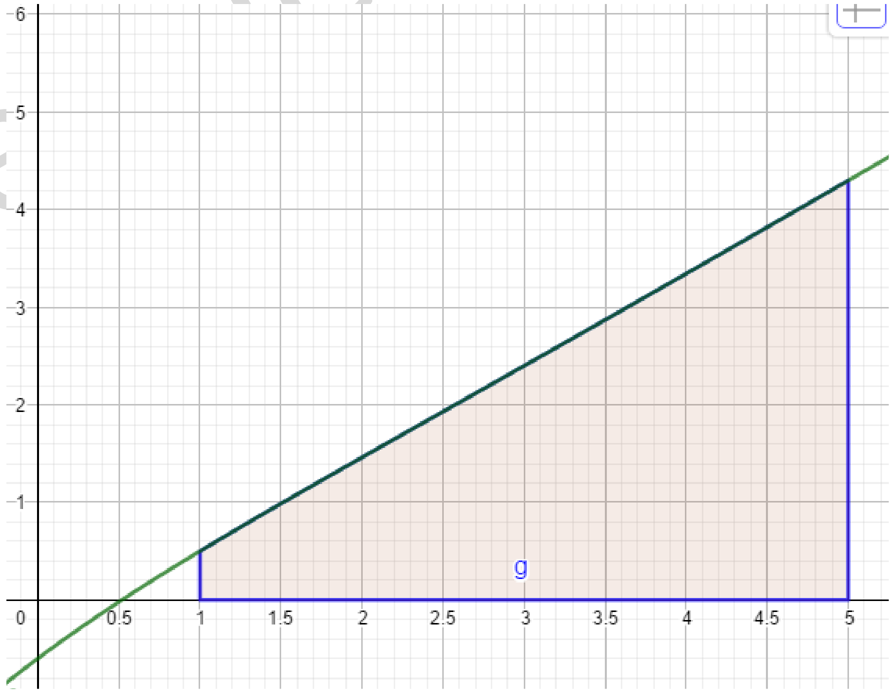
Cálculo del área

Para asegurarnos de que vamos a calcular el área pedida, es imprescindible hacer un esbozo de la gráfica. Si hacemos la integral directamente, corremos el riesgo de calcular un área incorrecta.

Hacemos una tabla de valores para h(x):

x	h(x)
1	0,5
2	1,46
3	2,4
4	3,34
5	4,3

Y representamos gráficamente:



Cálculo del área

Ahora ya podemos calcular el área, porque vemos que toda la función está por encima del eje X. Utilizamos la regla de Barrow.

$$\text{Á}\boldsymbol{rea} = \left[\frac{\boldsymbol{x^2}}{\mathbf{2}} - \boldsymbol{x} + \boldsymbol{ln}(\boldsymbol{x^2} + \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{5})\right]_{\mathbf{1}}^{\mathbf{5}}$$

$$\text{Á}\boldsymbol{rea} = \left(\frac{\mathbf{5^2}}{\mathbf{2}} - \mathbf{5} + \boldsymbol{ln}(\mathbf{5^2} + \mathbf{2} * \mathbf{5} + \mathbf{5})\right) - \left(\frac{\mathbf{1^2}}{\mathbf{2}} - \mathbf{1} + \boldsymbol{ln}(\mathbf{1^2} + \mathbf{2} * \mathbf{1} + \mathbf{5})\right) = \mathbf{8} + \ln \mathbf{5}$$

Por lo que el área encerrada por la curva y las curvas dadas, será: $\mathbf{8} + \boldsymbol{ln}\,\mathbf{5}\ \ \mathbf{u.a}$.