El problema del día

Selectividad C. Valenciana
Matemáticas II
Opción B, Problema 3
Julio 2019

Optimización de funciones
Cálculo de áreas mediante integración

El Enunciado

Un proyectil está unido al punto (0,2) por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos (-2,0) y (2,0).

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La función de variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4 - x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto (0,2).

b) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto (0,2) para $-2 \leq x \leq 2$.

c) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto (0,2) para $-2 \leq x \leq 2$.

d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \leq x \leq 2$.

Problema de optimización

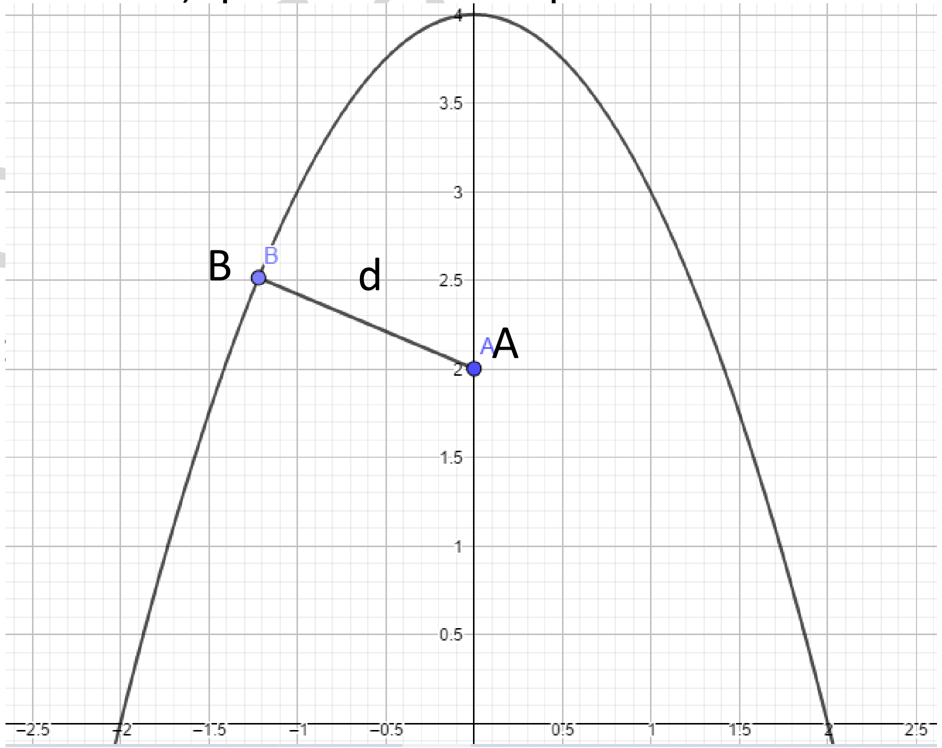
La distancia de un punto A=(a,b) a otro punto B=(c,d) se puede expresar como: $d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(c-a)^2+(d-b)^2}$, o sea, el módulo del vector que une dos puntos.

Por ello, dado que tengo dos puntos: A=(0,2) y B= $(x, 4-x^2)$, aplico la fórmula:

$d = f(x) = \sqrt{(x-0)^2+(4-x^2-2)^2} = \sqrt{x^2+(2-x^2)^2}$, desarrollando:

$d = f(x) = \sqrt{x^2+4-4x^2+x^4} = \sqrt{x^4-3x^2+4}$, que es la función pedida.

Solución: $\boldsymbol{f(x) = \sqrt{x^4-3x^2+4}}$ para -2



a) La función de variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4-x^2)$ de la curva $y = 4-x^2$ y el punto (0,2).

Calculando el máximo y el mínimo absoluto

Calculamos en primer lugar los extremos relativos con la derivada de f(x).

$f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} \to f'(x) = \frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}}$, igualo a cero.

$\frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = 0 \to 4x^3 - 6x = 0 \to 2x(2x^2 - 3) = 0$ y resuelvo.

$$2x(2x^2 - 3) = 0 \to \begin{cases} 2x = 0 \to x = 0 \\ 2x^2 - 3 = 0 \to x^2 = \frac{3}{2} \to \begin{cases} x = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ x = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

b) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto (0,2) para $-2 \leq x \leq 2$

c) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto (0,2) para $-2 \leq x \leq 2$

Calculando el máximo y el mínimo absoluto

Se realiza un estudio de signos de la función derivada entre -2 y 2.

	-2		$\frac{-\sqrt{6}}{2}$		0		$\frac{\sqrt{6}}{2}$		2
f(x)		↘		↗		↘		↗	
f'(x)		−		+		−		+	

El máximo relativo de f(x) está en x = 0, por tanto el máximo relativo de f(x) está en x =0. Pero como f(x) está definida en un intervalo debemos obtener el valor de f(x) en los extremos para determinar el máximo absoluto.

$f(-2) = \sqrt{8}$ $\quad f(0) = 2$ $\quad f(2) = \sqrt{8}$

Podemos comprobar que la mayor distancia del punto (0,2) se obtiene en los puntos **(-2,0) y (2,0)**

El mínimo absoluto estará en alguno de los dos mínimos relativos.

$f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}$ $\quad f\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}$

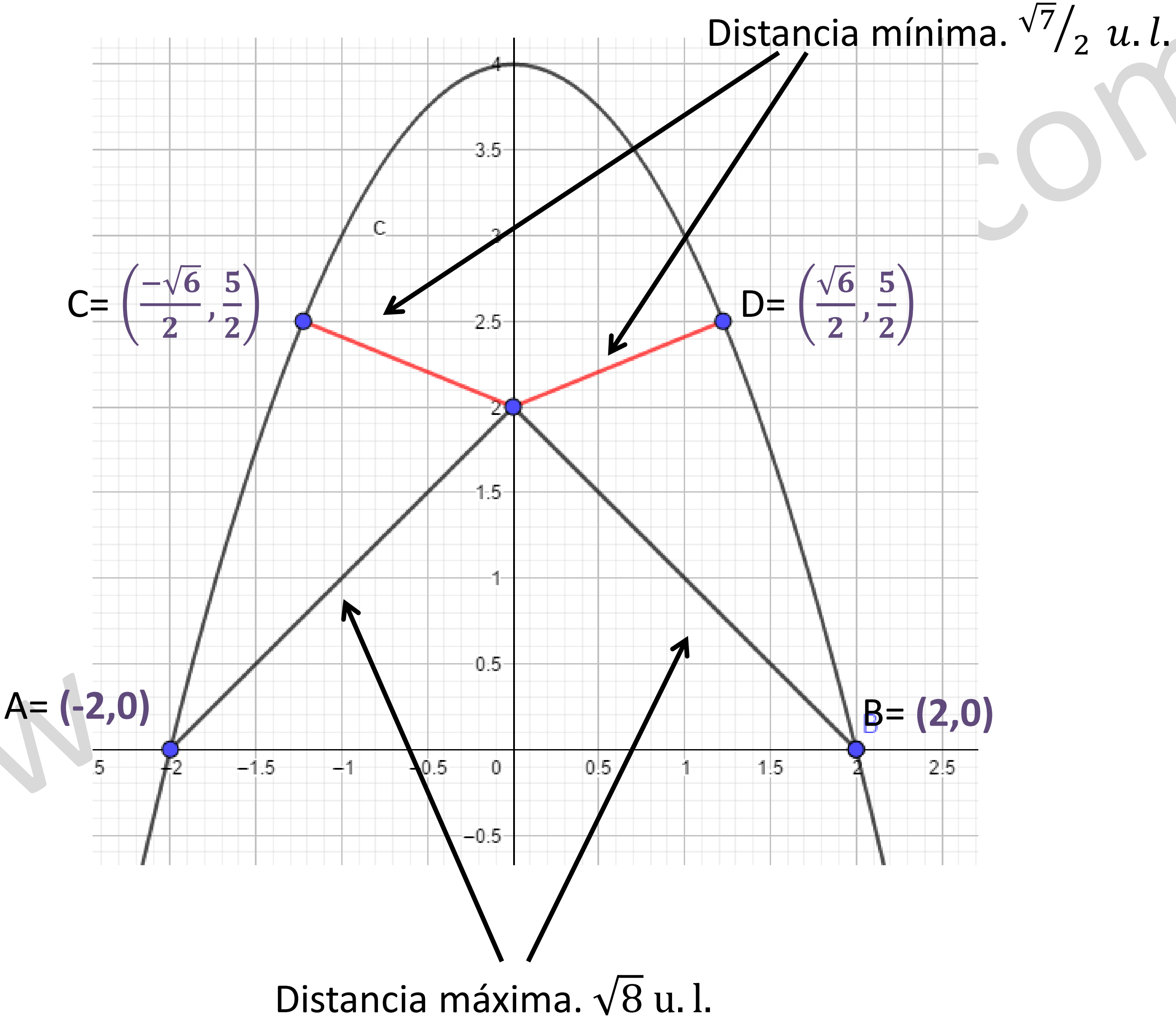
Podemos comprobar que la menor distancia del punto (0,2) se obtiene en los puntos $\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}, \frac{5}{2}\right)$ $\boldsymbol{y}$ $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{5}{2}\right)$

Para obtener el punto de la gráfica, se sustituye en $y=4-x^2$

x	y
-2	0
2	0
$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	5/2
$\frac{\sqrt{6}}{2}$	5/2

$f'(x) = \frac{4x^3-6x}{2\sqrt{x^4-3x^2+4}}$ $\quad f(x) = \sqrt{x^4-3x^2+4}$

Representación de la solución



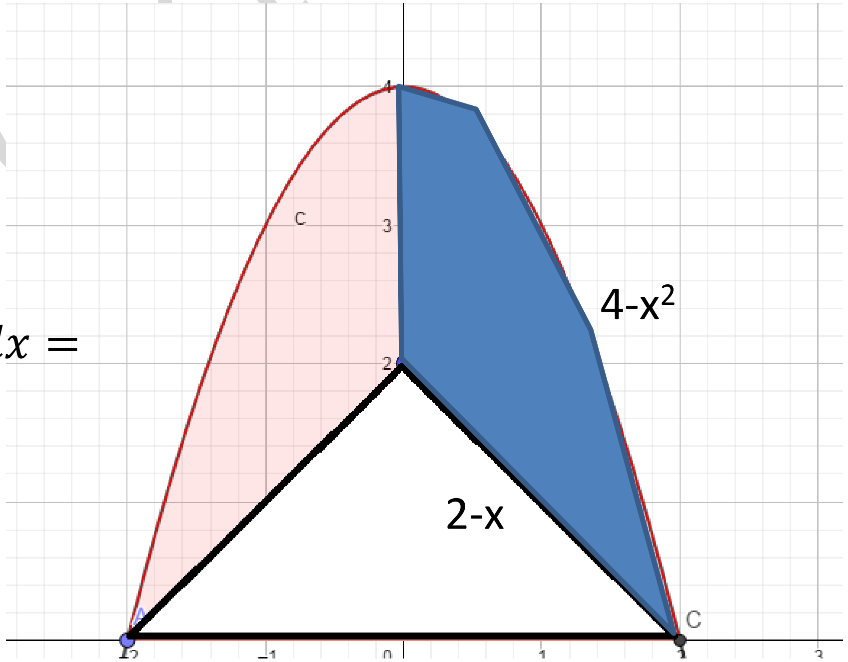
Cálculo del área comprendida entre las curvas

Se realiza la representación gráfica de la situación para poder decidir los límites de integración y las funciones a integrar.

Nos centraremos en la función $y = 2 - |x|$ ya que la gráfica de $y=4-x^2$ ya la hemos hecho anteriormente.

Puesto que $|x| = \begin{cases} -x & si\ x < 0 \\ x & si\ x \geq 0 \end{cases} \longrightarrow y = 2 - |x| = \begin{cases} 2 + x & si\ x < 0 \\ 2 - x & si\ x \geq 0 \end{cases}$

La representación gráfica quedaría de la siguiente forma.
Debemos calcular el área sombreada.



Para ello calcularemos el área entre 0 y 2, y su resultado lo multiplicaremos por 2, ya que las funciones son simétricas respecto OY.

$$\int_0^2 [4 - x^2 - (2 - x)]dx = \int_0^2 (2 - x^2 + x)dx =$$

$$= \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^2 = \frac{10}{3}$$

Por lo tanto, el área total, será el doble $\frac{20}{3}$

Solución: El área de la superficie pedida es $\frac{\mathbf{20}}{\mathbf{3}}$ u.a.