

El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas II

Opción A, Problema 1

Julio 2019

Discusión y Resolución de un Sistema
Lineal de Ecuaciones

El Enunciado

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + 3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \end{cases}$$

Donde α es un parámetro real. Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado.
- b) Las soluciones del sistema cuando $\alpha = -1$
- c) El valor de α para que el sistema tenga solución que verifique $x+y+z=0$

Discusión del Sistema

Se utilizará para ello el **teorema de Rouché**

Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$\begin{cases} 2x + 3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & \alpha \\ 1 & -2 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & \alpha + 1 \end{pmatrix}$$

Calculo del rango de A utilizando su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -20 - 3 + 18 + 4 = -1 \neq 0 \rightarrow \text{Ran}(A) = 3$$

Lo cual implica que $\text{Ran}(A^*) = 3$ ya que el Rango de la matriz ampliada siempre tiene un rango mayor o igual que la matriz de los coeficientes.

Se verifica por lo tanto que $\text{Ran}(A) = \text{Ran}(A^*) = n^{\circ} \text{ incógnitas} = 3$, lo cual implica, según el teorema de Rouché que **el Sistema dado es Compatible Determinado** para todo valor de α .

a) Los valores del parámetro α para los que el sistema es compatible y determinado.

Resolución del Sistema

Al sustituir el valor de $\alpha=-1$;
$$\begin{cases} 2x + 3z = -1 \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = 0 \end{cases}$$

Podemos utilizar para resolver el sistema la regla de Cramer o el método de Gauss. En este caso, utilizaré la regla de Cramer.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-7}{-1} = 7 \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{4}{-1} = -4$$
$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{5}{-1} = -5$$

Por tanto la solución del sistema es: **$x=7$; $y=-4$; $z=-5$**

Puedes comprobarlo sustituyendo en cualquiera de las 3 ecuaciones del sistema.

Resolviendo el sistema sobredeterminado

Al agregar una ecuación se obtiene un sistema de 4 ecuaciones y 3 incógnitas.

Puesto que el sistema debe tener solución única, debe ser **compatible determinado**.

En este caso, lo más fácil es obtener la solución del sistema inicial en función de α y después sustituirlo en la ecuación dada. El valor de α que cumpla la ecuación, será el que nos proporcione las soluciones del sistema.

$$\text{El sistema original es: } \begin{cases} 2x + 3z = \alpha \\ x - 2y + 2z = 5 \\ 3x - y + 5z = \alpha + 1 \end{cases}$$

Lo resolveré en función de α utilizando la regla de Cramer.

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 2 \\ \alpha + 1 & -1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{-2\alpha - 9}{-1} = 2\alpha + 9 \quad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \alpha & 3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 3 & \alpha + 1 & 5 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{4}{-1} = -4$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & \alpha \\ 1 & -2 & 5 \\ 3 & -1 & \alpha + 1 \end{vmatrix}}{-1} = \frac{\alpha + 6}{-1} = -\alpha - 6$$

c) El valor de α para que el sistema tenga solución que verifique $x+y+z=0$

Resolviendo el sistema sobredeterminado

Para asegurarnos de que el sistema de ecuaciones verifica la ecuación del enunciado, se sustituye la solución en la ecuación dada: $\mathbf{x+y+z=0}$

$$2\alpha + 9 - 4 - \alpha - 6 = 0 \longrightarrow \alpha = 1;$$

Luego, el valor pedido es $\alpha = 1$.

Teniendo en cuenta que:

$$x = 2\alpha + 9$$

$$y = -4$$

$$z = -\alpha - 6$$

c) El valor de α para que el sistema tenga solución que verifique $x+y+z=0$

El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas II

Opción B, Problema 1

Julio 2019

Algebra Matricial

El Enunciado

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ **obtener de forma razonada y explicando todos los pasos:**

- a) Los valores de α para los que la ecuación matricial $A * X = \alpha * X$ sólo admite una solución.
- b) Todas las soluciones de la ecuación matricial $A * X = 5 * X$
- c) Comprobar que $X = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $A * X = 2 * X$ y , sin calcular la matriz A^{100} , obtener el valor de β tal que $A^{100} * \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta * \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

Resolviendo en función de α un sistema homogéneo

Operamos las matrices dadas: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + 4y \\ -x + 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha * x \\ \alpha * y \end{pmatrix}$

Al ser las dos matrices iguales, sus términos a_{ij} deben coincidir, por ello podemos escribir:
$$\begin{cases} x + 4y = \alpha * x \\ -x + 6y = \alpha * y \end{cases}$$

Reordenando el sistema de ecuaciones obtenemos:
$$\begin{cases} (1 - \alpha)x + 4y = 0 \\ -x + (6 - \alpha)y = 0 \end{cases}$$

Este es un tipo especial de sistema de ecuaciones, se llama **HOMOGÉNEO**.

Un sistema Homogéneo es Compatible Determinado, según el teorema de Rouché-Fröbenius, cuando el Rango de la matriz de los coeficientes es **igual** al número de incógnitas (en este caso, 2).

Se define A:
$$A = \begin{pmatrix} 1 - \alpha & 4 \\ -1 & 6 - \alpha \end{pmatrix}$$

Se calcula el rango de la matriz A en función de α y se discute el sistema.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 - \alpha & 4 \\ -1 & 6 - \alpha \end{vmatrix} = (1 - \alpha)(6 - \alpha) + 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha_1 = 5 \\ \alpha_2 = 2 \end{cases} \begin{cases} \text{Si } \alpha \neq 2 \text{ y } \alpha \neq 5 \rightarrow \text{Ran}(A) = 2 \\ \text{Si } \alpha = 2 \text{ o } \alpha = 5 \rightarrow \text{Ran}(A) = 1 \end{cases}$$

Por lo tanto, el Sistema será Compatible Determinado para todos los números Reales, excepto el 2 y el 5.

Solución: $\alpha \in \mathbb{R} - \{2, 5\}$

Resolviendo un sistema compatible indeterminado

Se opera al igual que el apartado anterior: $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \alpha * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x + 4y \\ -x + 6y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha * x \\ \alpha * y \end{pmatrix}$

Puesto que $\alpha = 5$, podemos escribir el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + 4y = 5x \\ -x + 6y = 5y \end{cases}$

Reordenando: $\begin{cases} -4x + 4y = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$; se observa que las dos ecuaciones son proporcionales.

Por ello, el sistema es Compatible Indeterminado. Obtenemos las infinitas soluciones asignando un parámetro a una de las incógnitas.

Sustituyendo y despejando de $-x+y=0$: $x = \lambda \rightarrow -\lambda + y = 0 \rightarrow y = \lambda$

Solución: $\begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \end{cases}$; donde $\lambda \in \mathbb{R}$

Comenzando el método de inducción

Para resolver la primera parte del ejercicio basta con operar y comprobar que llegamos a la solución pedida.

$$A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 * 4 + 4 * 1 \\ -1 * 4 + 6 * 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 * 4 \\ 2 * 1 \end{pmatrix} \rightarrow \boxed{\begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

Para la segunda parte del ejercicio, aplicaremos el método de inducción ya que no nos permiten calcular la matriz A^{100} .

$$\text{Para } n=1; A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Para } n=2; A^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = A A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = A 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 A \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2 * 2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Ahora demostraremos por inducción que: } A^n \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = 2^n \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando el método de inducción

Ahora aplico el método de inducción:

Sabiendo que se cumple para $n=1$, suponemos que se cumple para n ;

$$A^n \binom{4}{1} = 2^n \binom{4}{1}.$$

Debemos comprobar que se cumple para $n+1$; $A^{n+1} \binom{4}{1} = 2^{n+1} \binom{4}{1}$

Desarrollamos la primera parte de la igualdad tratando de llegar a la segunda.

$$A^{n+1} \binom{4}{1} = A A^n \binom{4}{1} = A 2^n \binom{4}{1} = 2^n A \binom{4}{1} = 2^n 2 \binom{4}{1} = 2^{n+1} \binom{4}{1}$$

Como se puede comprobar, se ha demostrado para $n+1$ la proposición, por lo que queda probada por inducción la expresión: $A^n \binom{4}{1} = 2^n \binom{4}{1}$

Por ello para $n=100$; $A^{100} \binom{4}{1} = 2^{100} \binom{4}{1} \rightarrow \beta = 2^{100}$

El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas II

Opción A, Problema 2

Julio 2019

Geometría

El Enunciado

Se tienen el plano $\pi: 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P=(10,0,10)$.

Obtener razonadamente, explicando todos los pasos utilizados:

- a) La distancia del punto P al plano π
- b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas.
- c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C.

Cálculo de distancia de un punto a un plano

Se tienen el plano $\pi: 2x + y + 2z = 8$ y el punto $P=(10,0,10)$.

El método más fácil y directo consiste en aplicar la fórmula correspondiente.

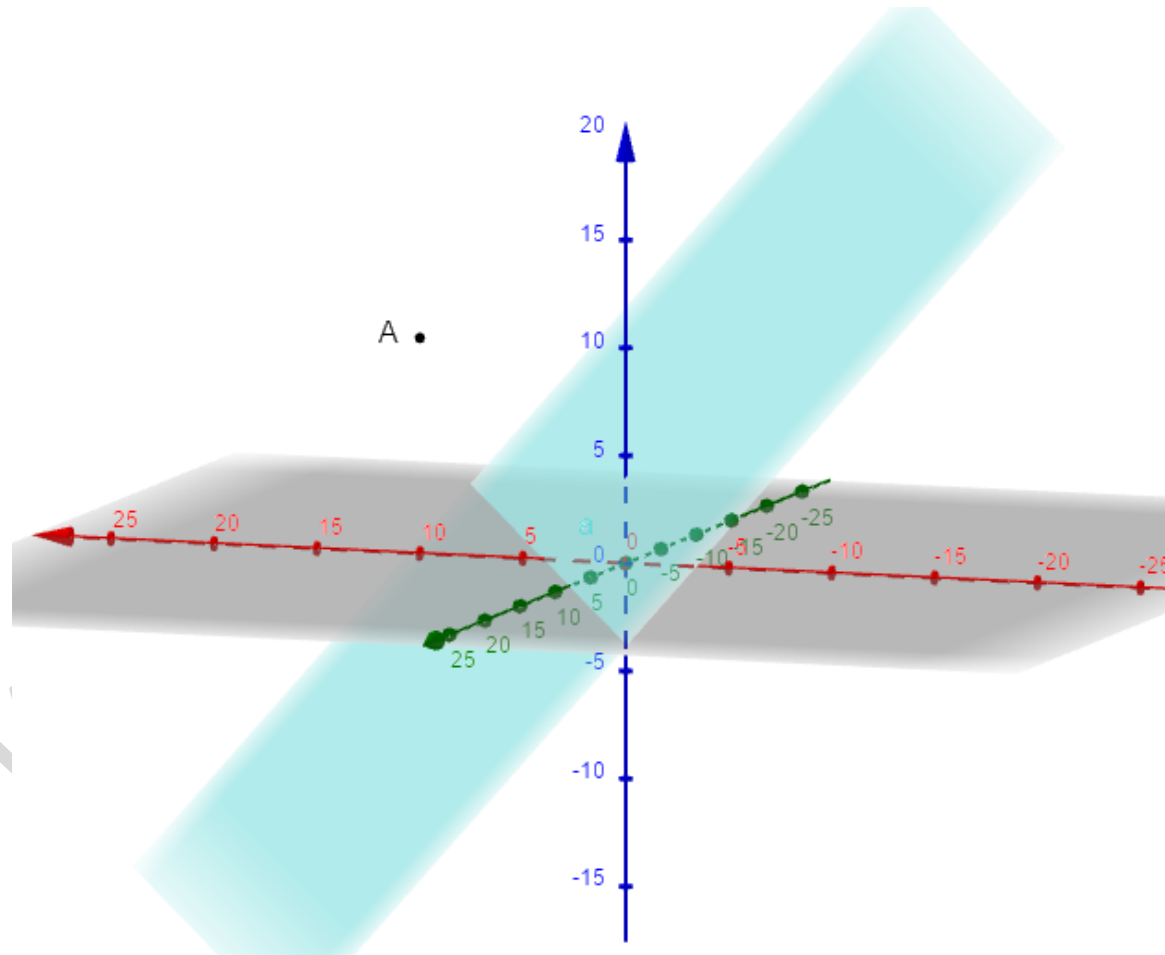
$$d_{P\pi} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Con los datos del ejercicio:

$$d_{P\pi} = \frac{|2 * 10 + 1 * 0 + 2 * 10 - 8|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2}} = \boxed{\frac{32}{3} \text{ u. l.}}$$

a) La distancia del punto P al plano π

Representación gráfica



Intersección del plano con los ejes de coordenadas

Las ecuaciones de los ejes de coordenadas son:

$$\text{Eje X: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} ; \text{ Eje Y: } \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} ; \text{ Eje Z: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Sustituyendo cada ecuación en la ecuación del plano, obtendremos los puntos de intersección correspondientes.

$$\text{Eje X con } \pi: 2*\lambda+1*0+2*0-8=0 \rightarrow \lambda=4 \rightarrow A=(4,0,0)$$

$$\text{Eje Y con } \pi: 2*0+1*\lambda+2*0-8=0 \rightarrow \lambda=8 \rightarrow B=(0,8,0)$$

$$\text{Eje Z con } \pi: 2*0+1*0+2*\lambda-8=0 \rightarrow \lambda=4 \rightarrow C=(0,0,4)$$

A partir de los puntos A, B y C, podemos calcular los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AB}=B-A=(0,8,0)-(4,0,0)=(-4,8,0)$$

$$\overrightarrow{AC}=C-A=(0,0,4)-(4,0,0)=(-4,0,4)$$

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas.

Cálculo del área del triángulo

Lo más fácil es aplicar la fórmula correspondiente:

$$A_{triángulo} = \frac{1}{2} * |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

Calculo primero el producto vectorial:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -4 & 8 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 32\vec{i} + 16\vec{j} + 32\vec{k}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= B-A = (0,8,0)-(4,0,0) = (-4,8,0) \\ \overrightarrow{AC} &= C-A = (0,0,4)-(4,0,0) = (-4,0,4) \end{aligned}$$

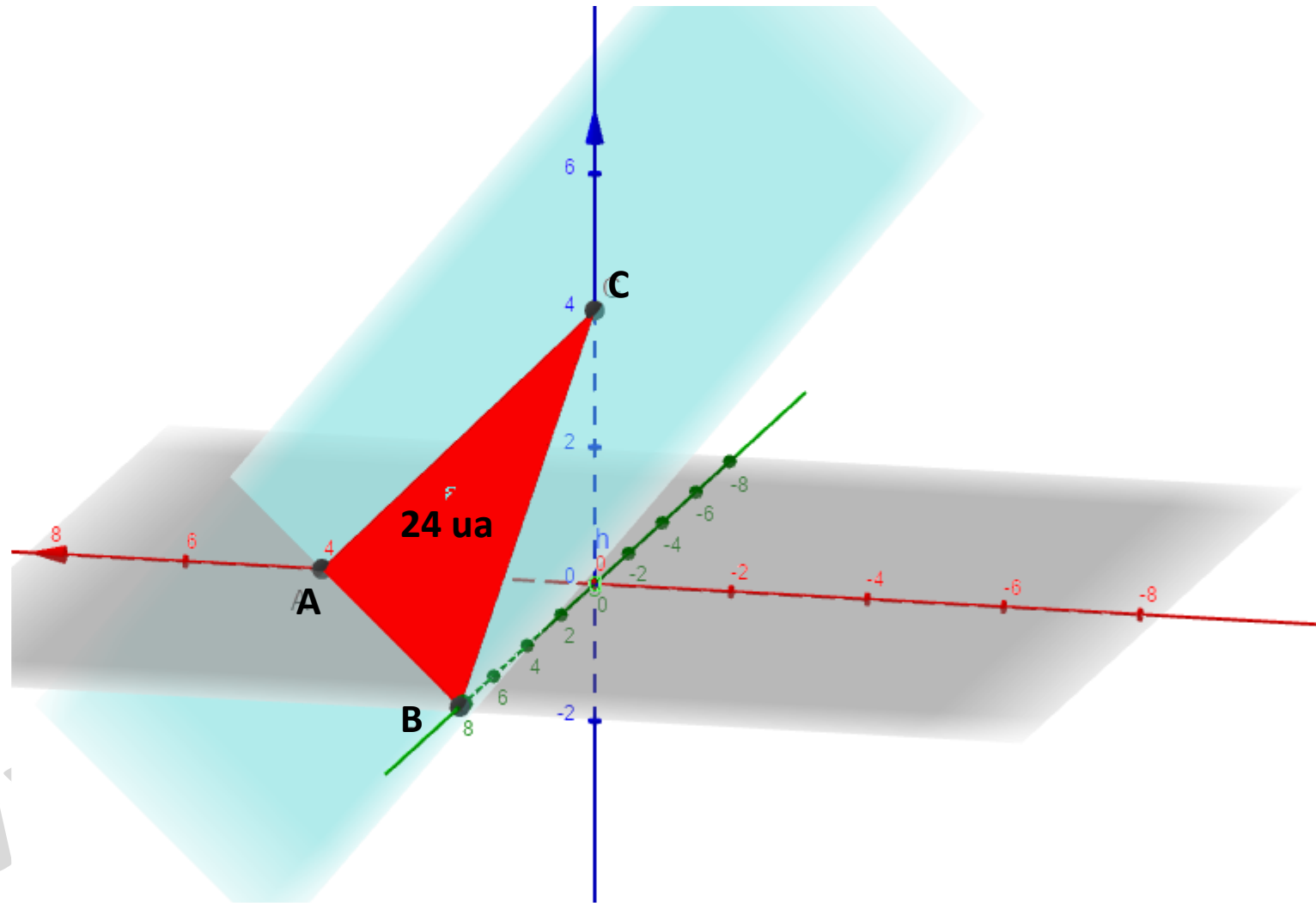
Calculo el módulo:

$$|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{32^2 + 16^2 + 32^2} = 48$$

$$\text{Siendo el área: } A_{triángulo} = \frac{1}{2} * 48 = \boxed{24 \text{ u. a.}}$$

b) El área del triángulo cuyos vértices son los puntos A, B y C, obtenidos al hallar la intersección del plano π con los ejes de coordenadas.

Área del Triángulo



Cálculo del volumen del tetraedro

Lo más fácil es aplicar la fórmula correspondiente, utilizando el producto mixto:

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6} * [\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CP}]$$

Calculo los vectores $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$ y $\overrightarrow{CP}$:

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (10,0,10) - (4,0,0) = (6,0,10)$$

$$\overrightarrow{BP} = P - B = (10,0,10) - (0,8,0) = (10,-8,10)$$

$$\overrightarrow{CP} = P - C = (10,0,10) - (0,0,4) = (10,0,6)$$

Calculo el producto mixto:

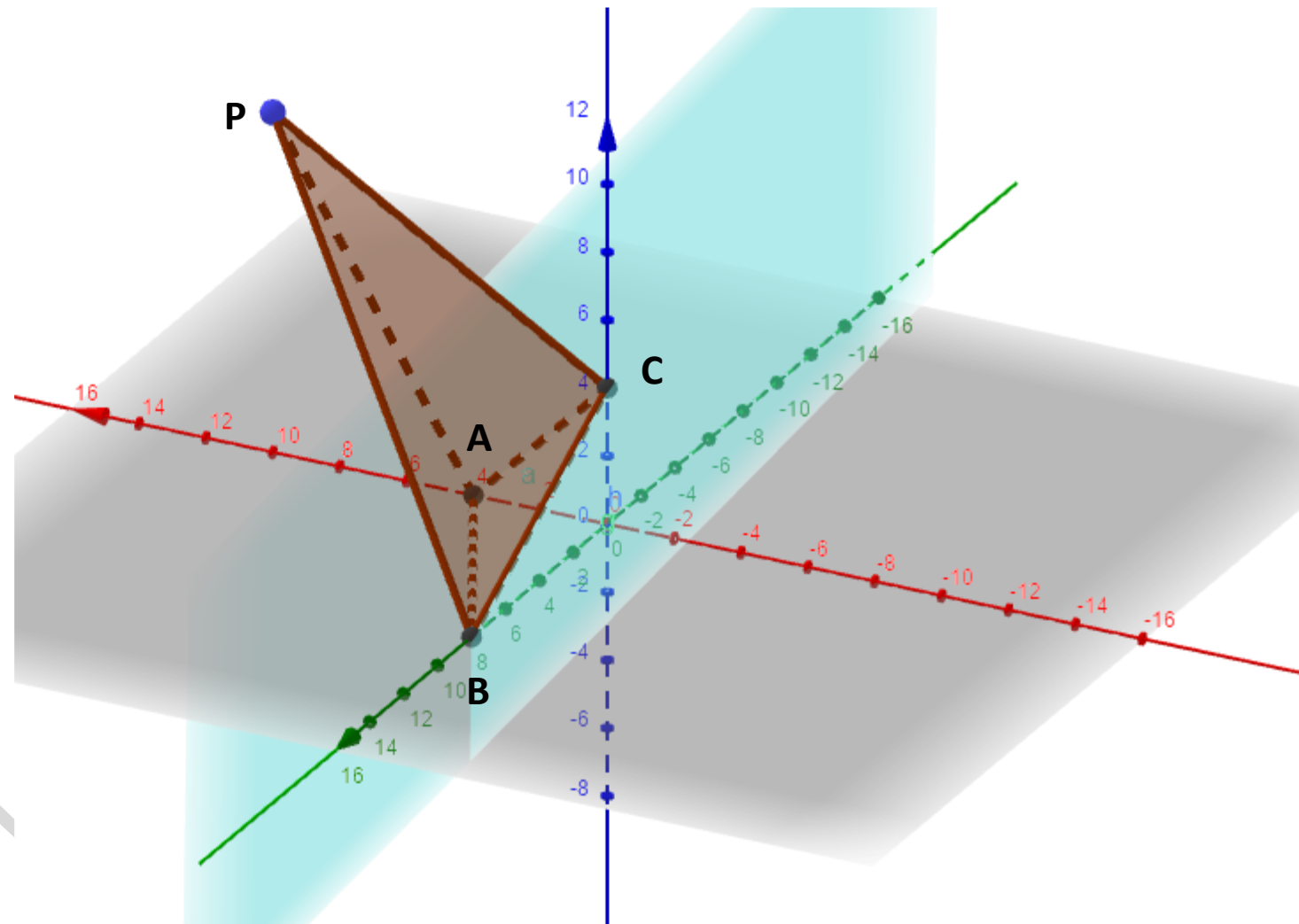
$$[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CP}] = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 10 \\ 10 & -8 & 10 \\ 10 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -8 * \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = -8 * (36 - 100) = 512$$

Siendo el volumen:

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6} * 512 = \boxed{\frac{256}{3} \text{ u.v.}}$$

c) El volumen del tetraedro cuyos vértices son P, A, B y C.

Volumen del tetraedro



El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas II

Opción B, Problema 2

Julio 2019

Geometría Euclidiana

El Enunciado

Se dan en el espacio la recta $r: \frac{x-\alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta}$ y el plano $\pi: x + 2y + 3z = 6$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β .
- b) La distancia entre la recta r y el plano π cuando $\alpha=6$ y $\beta=3$.
- c) La ecuación del plano que pasa por $(0,0,0)$ y no corta al plano π .

Posición relativa entre la recta y el plano

Las posiciones relativas posibles entre recta y plano son: paralelas, secantes, recta contenida en el plano.

Aunque hay muchas formas de resolver este ejercicio, hoy sólo haré una de ellas.

Un método práctico y mecánico de obtener la posición relativa es mediante el análisis del sistema formado por las ecuaciones implícitas de la recta y la ecuación del plano.

Para ello, obtenemos las ecuaciones implícitas de la recta a partir de su forma continua.

$$r: \frac{x - \alpha}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta} \rightarrow \begin{cases} \frac{x - \alpha}{-1} = \frac{y}{-4} \rightarrow -4x + 4\alpha = -y \rightarrow -4x + y = -4\alpha \\ \frac{y}{-4} = \frac{z}{\beta} \rightarrow \beta y = -4z \rightarrow \beta y + 4z = 0 \end{cases}$$

Quedando las ecuaciones implícitas de la recta: $r: \begin{cases} -4x + y = -4\alpha \\ \beta y + 4z = 0 \end{cases}$

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β .

Posición relativa entre la recta y el plano

Formamos ahora el sistema de ecuaciones con la recta r y el plano π :

$$\begin{cases} -4x + y = -4\alpha \\ \beta y + 4z = 0 \\ x + 2y + 3z = 6 \end{cases}$$

Lo discutiremos en función de α y β utilizando el teorema de Rouché.

Defino: $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $A^* = \begin{pmatrix} -4 & 1 & 0 & -4\alpha \\ 0 & \beta & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Calculo el rango de A :

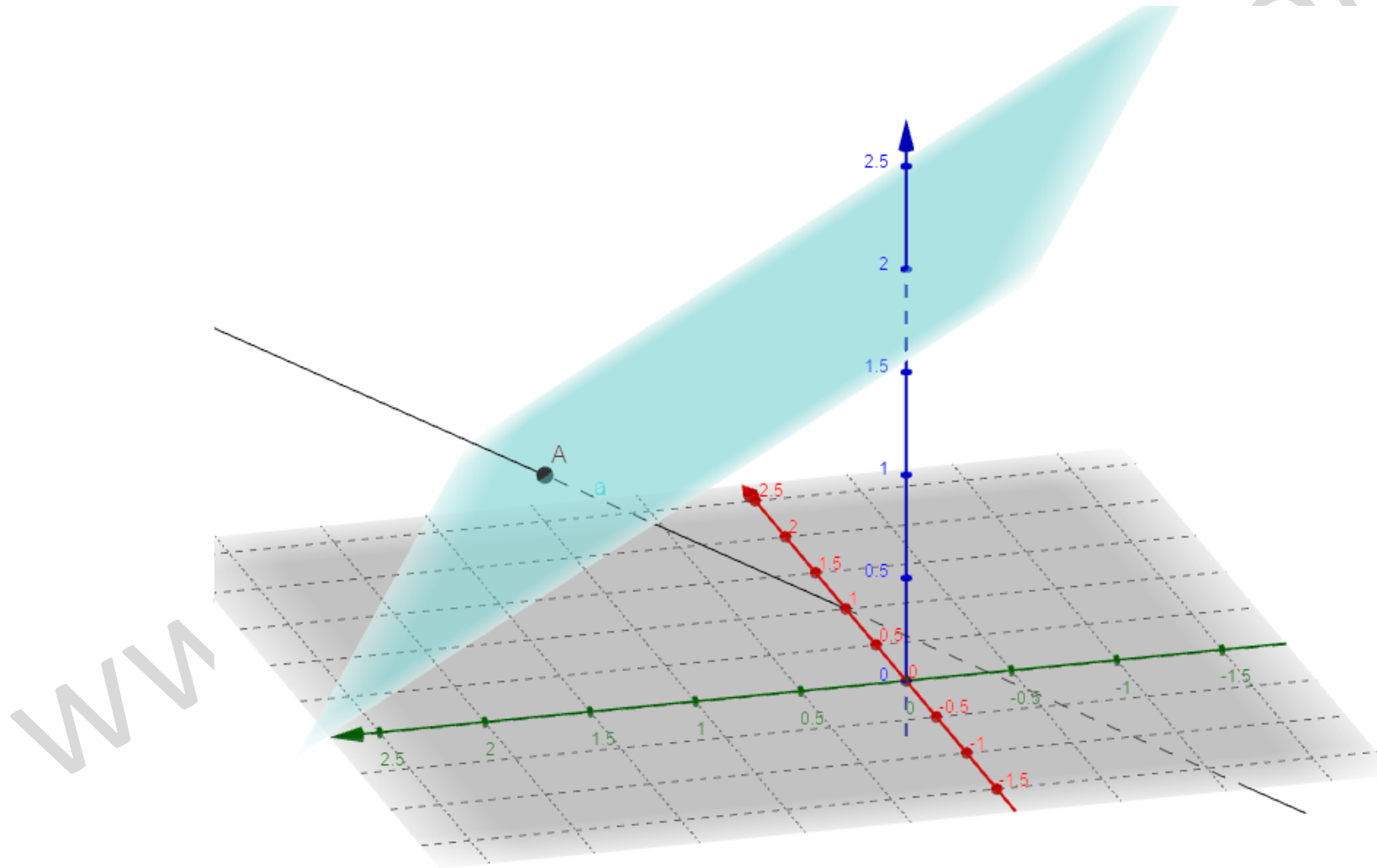
$$|A| = \begin{vmatrix} -4 & 1 & 0 \\ 0 & \beta & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -12\beta + 36; -12\beta + 36 = 0; \beta = 3.$$

Si $\beta \neq 3$, el rango de A es 3. Ello obliga a que el rango de A^* sea también 3. Por ello, según el teorema de Rouché, el sistema es compatible determinado y la recta y el plano serían secantes.

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β .

Ejemplo de recta y plano secantes

Para $\alpha=1$ y $\beta=-2$ he hecho la representación gráfica. En ella se puede ver que recta y plano son secantes. (Hay infinitas combinaciones más para α y β).



Posición relativa entre la recta y el plano

Si $\beta=3$, se calcula el rango de A utilizando un menor de la matriz.

$$\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -12 \neq 0 \rightarrow \text{Ran}(A) = 2$$

Ahora calculo el rango de la matriz ampliada, A^* . Se orla la matriz y se hace el determinante (previamente se ha sustituido $\beta=3$).

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -4\alpha \\ 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -4\alpha + 24; -4\alpha + 24 = 0; \alpha = 6.$$

Si $\alpha \neq 6 \rightarrow \text{Ran}(A)=2; \text{Ran}(A^*)=3 \rightarrow$ El sistema es incompatible y la recta y el plano son **paralelas**.

Si $\alpha = 6 \rightarrow \text{Ran}(A)=2; \text{Ran}(A^*)=2 < \text{número de incógnitas} \rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado y la recta **está contenida en el plano**.

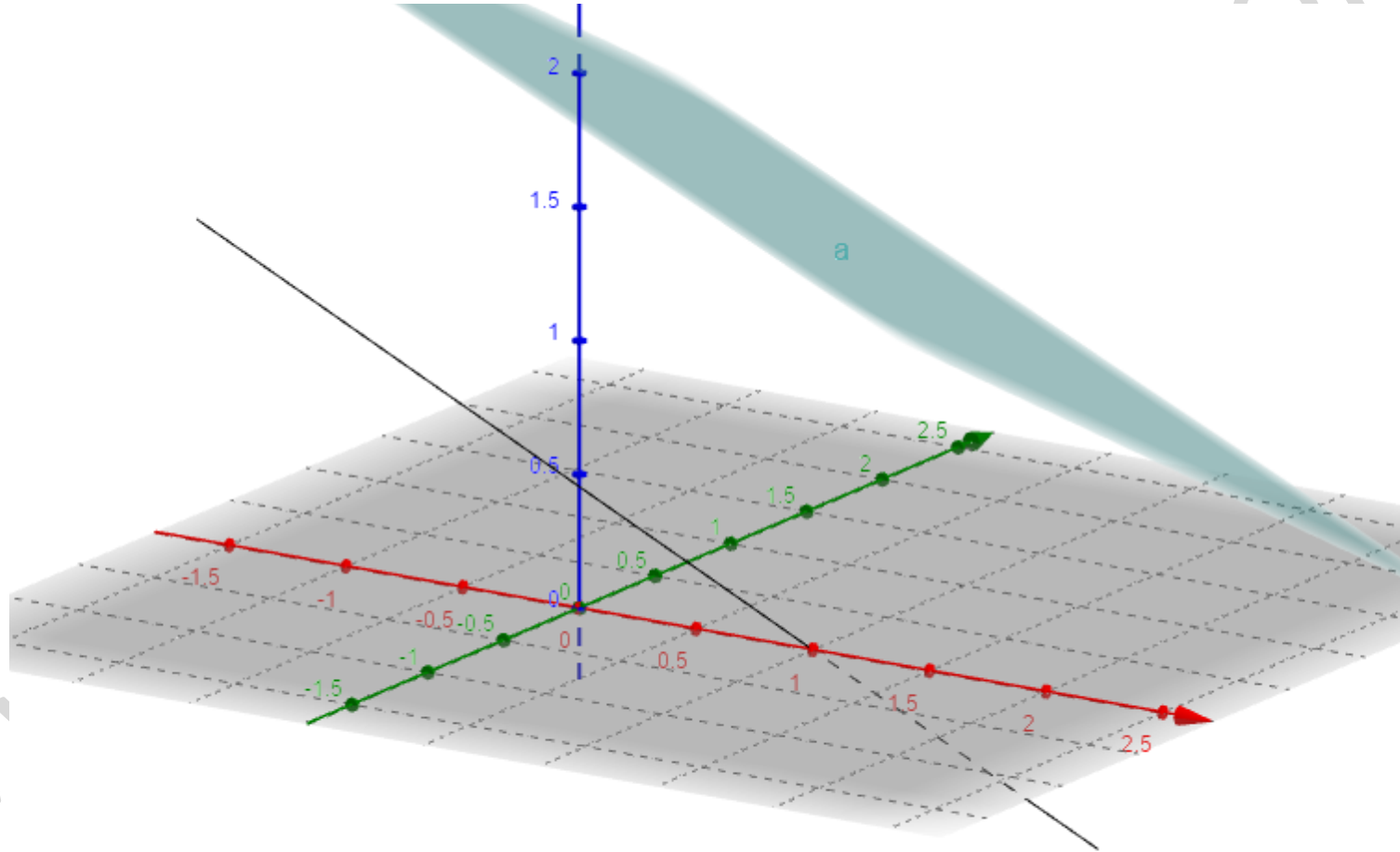
Solución:

$\beta \neq 3$	$\forall \alpha \in \mathbb{R}$	La recta y el plano son SECANTES.
$\beta = 3$	$\alpha \neq 6$	La recta y el plano son PARALELOS.
	$\alpha = 6$	La recta está CONTENIDA en el plano.

a) La posición relativa de la recta r y el plano π en función de los parámetros reales α y β .

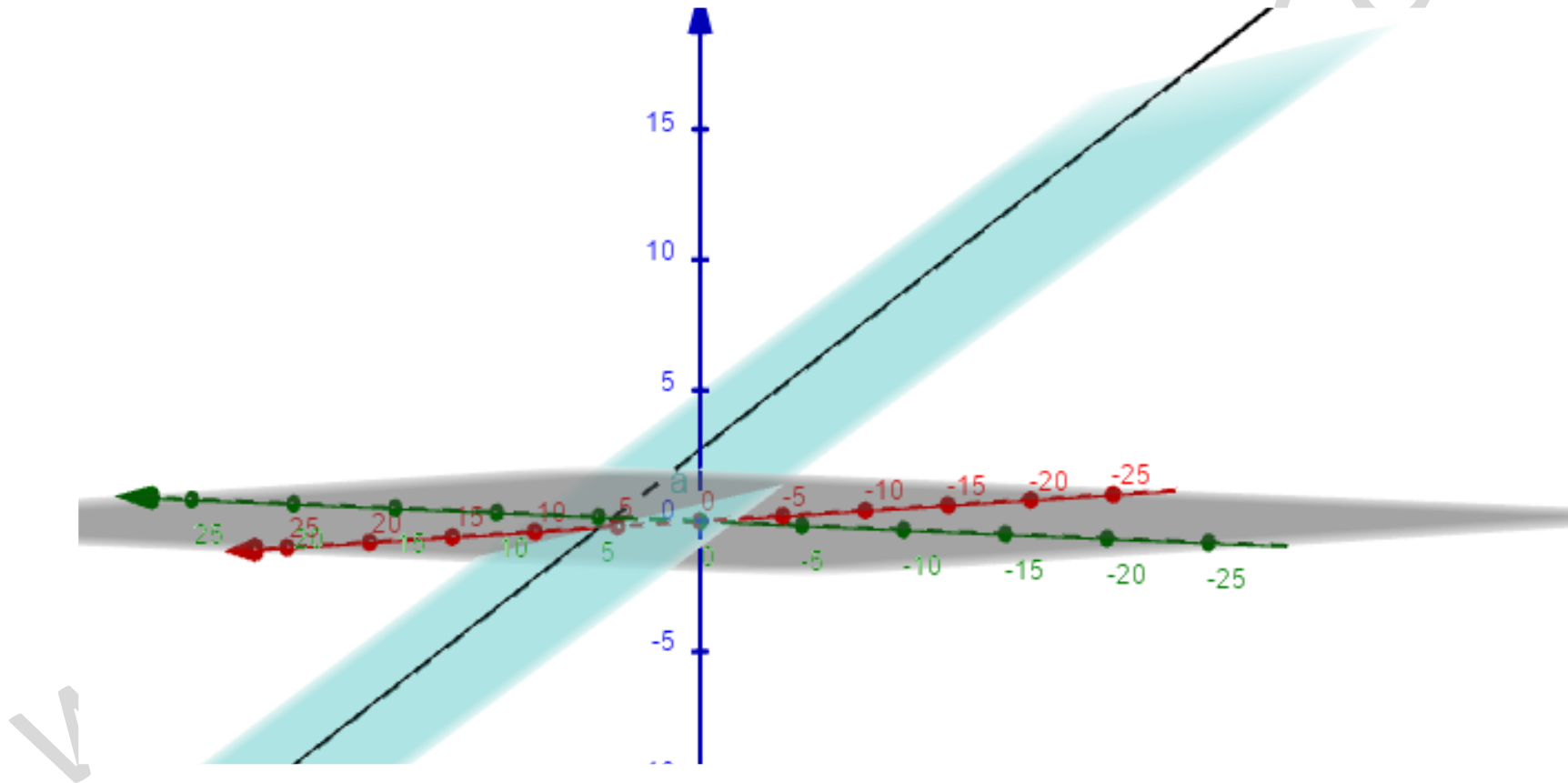
Ejemplo de recta y plano paralelos

Para $\alpha=1$ y $\beta=3$ he hecho la representación gráfica. En ella se puede ver que recta y plano son paralelos. (Hay infinitas combinaciones más para α).



Recta contenida en el plano

Para $\alpha=6$ y $\beta=3$ he hecho la representación gráfica. En ella se puede ver que la recta está contenida en el plano.



Distancia y ecuación del plano.

Para los valores dados en el apartado b) la recta está contenida en el plano, por ello la distancia entre la recta y el plano es **CERO**.

En el apartado c) el plano pedido debe ser paralelo a π puesto que no se cortan.

Por ello tienen el mismo vector normal y escribiremos: $\sigma: x+2y+3z=D$.

Para calcular D, basta con sustituir el punto (0,0,0) en el plano y despejar D.

$$0+2*0+3*0=D \rightarrow D=0$$

Por lo que la ecuación del plano pedido será: **$\sigma: x+2y+3z=0$**

El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas II

Opción A, Problema 3

Julio 2019

Análisis de funciones

Cálculo de áreas mediante integración

El Enunciado

Se da la función real h definida por $h(x) = \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5}$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El dominio de la función h . $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$ y $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$
- b) La asíntota de la curva $y=h(x)$.
- c) La primitiva de la función h y el área de la superficie encerrada entre las rectas $y=0$, $x=1$, $x=5$ y la curva $y=h(x)$.

Dominio y Límites

Para calcular el dominio de $h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5}$ basta con igualar a cero el denominador.

$$x^2 + 2x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = \nexists; \text{ por lo que } \mathbf{Dom\ h(x)=R.}$$

Calculo los límites pedidos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = \frac{-3}{5}$$

Cálculo de la Asíntota Oblicua

Puesto que el dominio de la función son todos los números reales, la función no tiene **asíntota vertical**.

Puesto que el límite de la función en el infinito es igual a infinito, la función no tiene **asíntota horizontal**.

Dado que el grado del numerador es una unidad mayor que el grado del denominador, la función tendrá una **asíntota oblicua**.

Para calcularla hay dos métodos. Utilizaremos el más directo, que es resolución de la división. El cociente será la asíntota oblicua.

$$\frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{-x^3 - 2x^2 - 5x} \quad \left| \begin{array}{r} x^2 + 2x + 5 \\ x - 1 \end{array} \right. \text{ siendo } \boxed{y = x - 1 \text{ la asíntota oblicua}}$$
$$\frac{-x^2 - 3}{x^2 + 2x + 5} \quad \left| \begin{array}{r} x^2 + 2x + 5 \\ 2x + 2 \end{array} \right.$$

También se puede hacer por el método de la fórmula: $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ $n = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - mx$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^3 + 2x^2 + 5x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x + 5} - x = -1$$

$$\boxed{\begin{array}{l} y = mx + n \\ y = x - 1 \end{array}}$$

Cálculo de la primitiva

A partir de la división hecha en el apartado anterior:

$$\begin{array}{r|l} x^3+x^2+5x-3 & x^2+2x+5 \\ -x^3-2x^2-5x & \\ \hline -x^2-3 & \\ x^2+2x+5 & \\ \hline 2x+2 & \end{array}$$

$h(x) = \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} = x - 1 + \frac{2x+2}{x^2+2x+5}$, lo que nos permite escribir:

$\int h(x) dx = \int \frac{x^3+x^2+5x-3}{x^2+2x+5} dx = \int x - 1 + \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx$, y ahora podemos integrar sumando a sumando ya que todas las integrales son inmediatas.

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c_1; \int 1 dx = x + c_2; \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx = \ln(x^2 + 2x + 5) + c_3$$

Siendo la solución: $\int h(x) dx = \frac{x^2}{2} - x + \ln(x^2 + 2x + 5) + C$

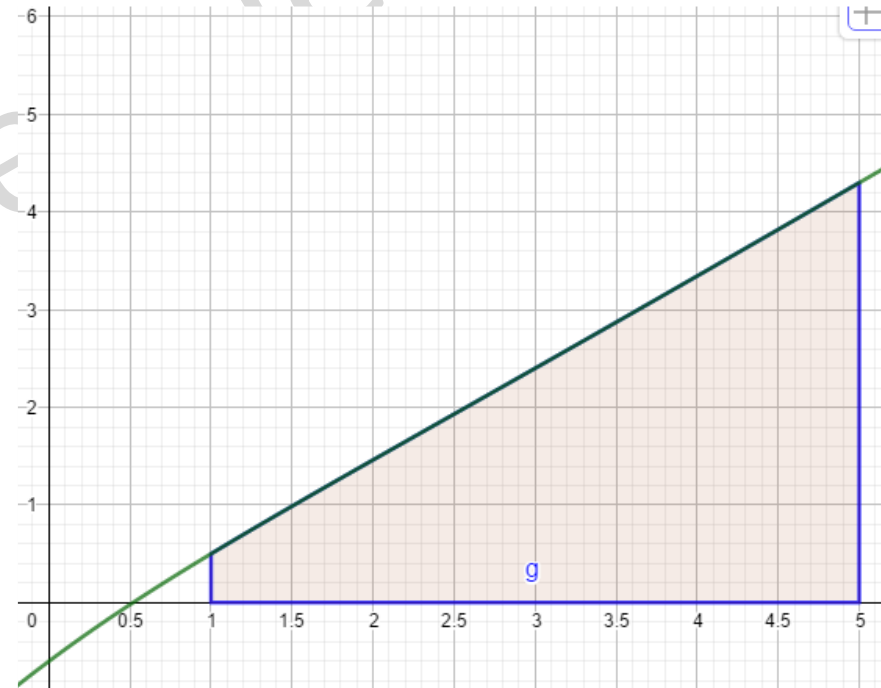
Cálculo del área

Para asegurarnos de que vamos a calcular el área pedida, es imprescindible hacer un esbozo de la gráfica. Si hacemos la integral directamente, corremos el riesgo de calcular un área incorrecta.

Hacemos una tabla de valores para $h(x)$:

x	h(x)
1	0,5
2	1,46
3	2,4
4	3,34
5	4,3

Y representamos gráficamente:



Cálculo del área

Ahora ya podemos calcular el área, porque vemos que toda la función está por encima del eje X. Utilizamos la regla de Barrow.

$$\text{Área} = \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x^2 + 2x + 5) \right]_1^5$$

$$\text{Área} = \left(\frac{5^2}{2} - 5 + \ln(5^2 + 2 * 5 + 5) \right) - \left(\frac{1^2}{2} - 1 + \ln(1^2 + 2 * 1 + 5) \right) = 8 + \ln 5$$

Por lo que el área encerrada por la curva y las curvas dadas, será: **$8 + \ln 5$ u. a.**

El problema del día

Selectividad C. Valenciana

Matemáticas II

Opción B, Problema 3

Julio 2019

Optimización de funciones

Cálculo de áreas mediante integración

El Enunciado

Un proyectil está unido al punto $(0,2)$ por una cuerda elástica y tensa. El proyectil recorre la curva $y = 4 - x^2$ de extremos $(-2,0)$ y $(2,0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La función de variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4 - x^2)$ de la curva $y = 4 - x^2$ y el punto $(0,2)$.
- b) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2 \leq x \leq 2$.
- c) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2 \leq x \leq 2$.
- d) El área de la superficie por la que se ha movido la cuerda elástica, es decir, el área comprendida entre las curvas $y = 4 - x^2$ e $y = 2 - |x|$ cuando $-2 \leq x \leq 2$.

Problema de optimización

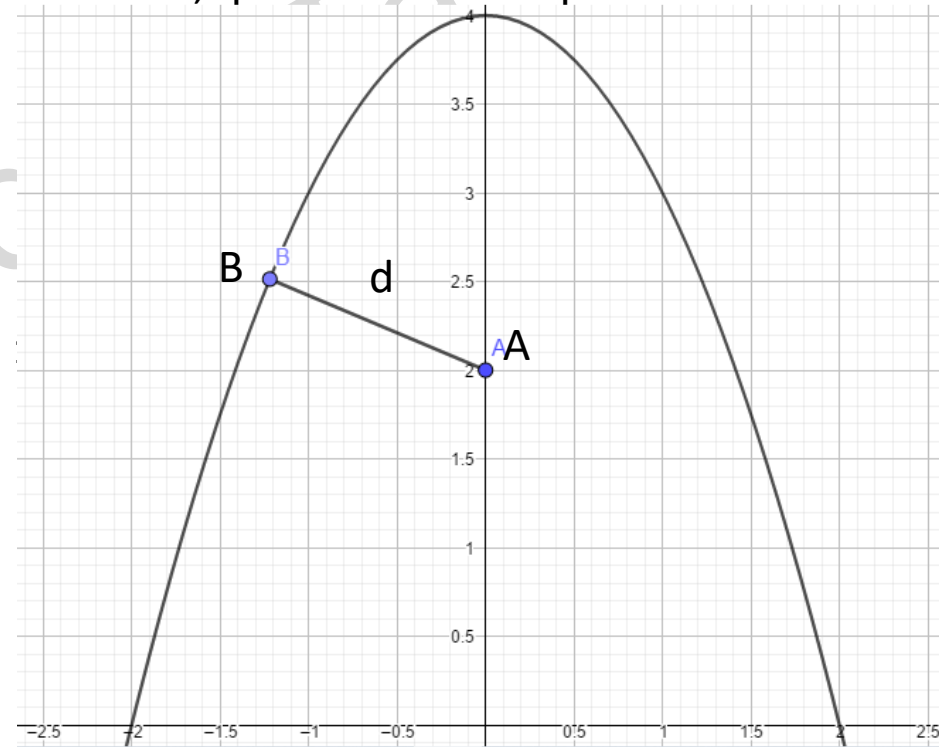
La distancia de un punto $A=(a,b)$ a otro punto $B=(c,d)$ se puede expresar como: $d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$, o sea, el módulo del vector que une dos puntos.

Por ello, dado que tengo dos puntos: $A=(0,2)$ y $B=(x, 4-x^2)$, aplico la fórmula:

$$d = f(x) = \sqrt{(x-0)^2 + (4-x^2-2)^2} = \sqrt{x^2 + (2-x^2)^2}, \text{ desarrollando:}$$

$$d = f(x) = \sqrt{x^2 + 4 - 4x^2 + x^4} = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}, \text{ que es la función pedida.}$$

Solución: $f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$ para $-2 \leq x \leq 2$



a) La función de variable x que expresa la distancia entre un punto cualquiera $(x, 4-x^2)$ de la curva $y = 4-x^2$ y el punto $(0,2)$.

Calculando el máximo y el mínimo absoluto

Calculamos en primer lugar los extremos relativos con la derivada de $f(x)$.

$$f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4} \rightarrow f'(x) = \frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}}, \text{ igualo a cero.}$$

$$\frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} = 0 \rightarrow 4x^3 - 6x = 0 \rightarrow 2x(2x^2 - 3) = 0 \text{ y resuelvo.}$$

$$2x(2x^2 - 3) = 0 \rightarrow \begin{cases} 2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ 2x^2 - 3 = 0 \rightarrow x^2 = \frac{3}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \\ x = -\sqrt{\frac{3}{2}} = -\frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

b) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a mayor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2 \leq x \leq 2$

c) Los puntos de la curva $y = 4 - x^2$ a menor distancia absoluta del punto $(0,2)$ para $-2 \leq x \leq 2$

Calculando el máximo y el mínimo absoluto

Se realiza un estudio de signos de la función derivada entre -2 y 2.

	-2	$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	0	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	2
f(x)					
f'(x)	-	+	-	+	

El máximo relativo de $f(x)$ está en $x = 0$, por tanto el máximo relativo de $f(x)$ está en $x = 0$. Pero como $f(x)$ está definida en un intervalo debemos obtener el valor de $f(x)$ en los extremos para determinar el máximo absoluto.

$$f(-2) = \sqrt{8} \quad f(0) = 2 \quad f(2) = \sqrt{8}$$

Podemos comprobar que la mayor distancia del punto $(0,2)$ se obtiene en los puntos **$(-2,0)$ y $(2,0)$**

El mínimo absoluto estará en alguno de los dos mínimos relativos.

$$f\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2} \quad f\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{\sqrt{7}}{2}$$

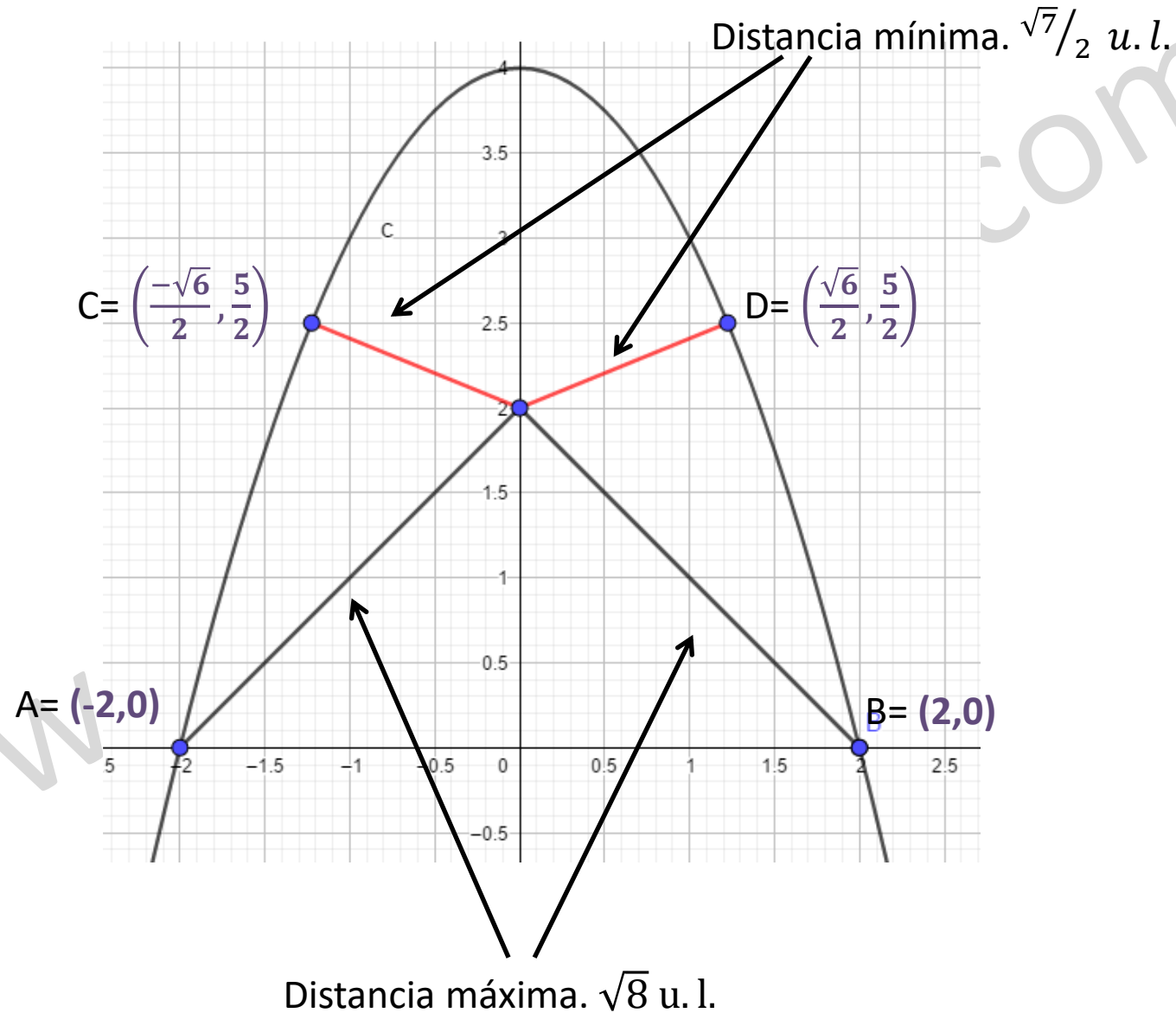
Podemos comprobar que la menor distancia del punto $(0,2)$ se obtiene en los puntos $\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{5}{2}\right)$ y $\left(\frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{5}{2}\right)$

Para obtener el punto de la gráfica, se sustituye en $y=4-x^2$

$$f'(x) = \frac{4x^3 - 6x}{2\sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}} \quad f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

x	y
-2	0
2	0
$-\frac{\sqrt{6}}{2}$	5/2
$\frac{\sqrt{6}}{2}$	5/2

Representación de la solución



Cálculo del área comprendida entre las curvas

Se realiza la representación gráfica de la situación para poder decidir los límites de integración y las funciones a integrar.

Nos centraremos en la función $y = 2 - |x|$ ya que la gráfica de $y=4-x^2$ ya la hemos hecho anteriormente.

$$\text{Puesto que } |x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \longrightarrow y = 2 - |x| = \begin{cases} 2 + x & \text{si } x < 0 \\ 2 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La representación gráfica quedaría de la siguiente forma.

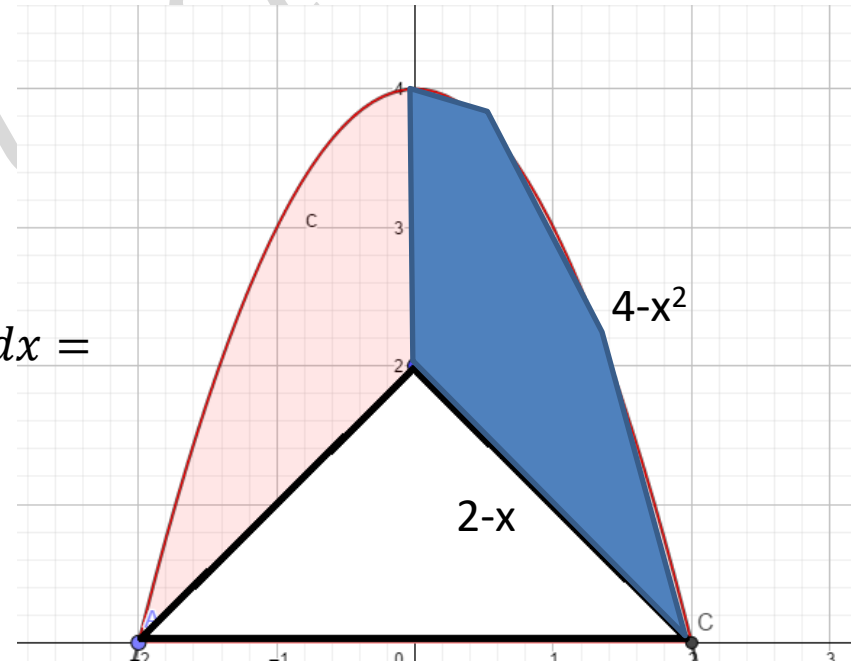
Debemos calcular el área sombreada.

Para ello calcularemos el área entre 0 y 2, y su resultado lo multiplicaremos por 2, ya que las funciones son simétricas respecto OY.

$$\int_0^2 [4 - x^2 - (2 - x)] dx = \int_0^2 (2 - x^2 + x) dx =$$

$$= \left[2x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right]_0^2 = \frac{10}{3}$$

Por lo tanto, el área total, será el doble $\frac{20}{3}$



Solución: El área de la superficie pedida es $\frac{20}{3}$ u.a.