

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Julio 2020



Problema 1

Discusión de un sistema de ecuaciones

El Enunciado

Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y + \alpha z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ \alpha x + y + z = -2 \end{cases}$$

Donde α es un parámetro real. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

- a) El estudio del sistema en función del parámetro α .
- b) Las soluciones del sistema cuando $\alpha = -2$.
- c) La solución del sistema cuando $\alpha = 0$.

Solución:

Para discutir el sistema de ecuaciones se utilizará el teorema de Rouché
Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \alpha & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ \alpha & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculo del rango de A en función de α utilizando su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\alpha^3 + 3\alpha - 2; \quad -\alpha^3 + 3\alpha - 2 = 0 \longrightarrow (\alpha - 1) \cdot (-\alpha^2 - \alpha + 2) = 0 \longrightarrow \boxed{\begin{cases} \alpha = -2 \\ \alpha = 1 \end{cases}}$$

Si $\alpha \neq -2$ y $\alpha \neq 1$ entonces $|A| \neq 0$, $\text{Ran}(A) = 3 \longrightarrow \text{Ran}(A^*) = 3$

Si $\alpha = -2$ o $\alpha = 1$ entonces $|A| = 0$, $\text{Ran}(A) < 3 \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A^* sustituyendo los valores de α en las matrices.

En esta ocasión, calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para los valores concretos de α . También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

Discusión del Sistema

Si $a = -2 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3+2F_1}]{F_2=F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Al finalizar el método de Gauss se observa que tanto A como A^* tienen dos filas linealmente independientes, por lo que para $a = -2$, $\text{Ran}(A) = 2$ y $\text{Ran}(A^*) = 2$

Si $a = 1 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

A

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}]{F_2=F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

A

Al finalizar el método de Gauss se observa que A sólo tiene una fila linealmente independiente, por ello para $a = 1$, $\text{Ran}(A) = 1$

En cambio, A^* tiene dos filas linealmente independientes, por lo que para $a = 1$, $\text{Ran}(A^*) = 2$

Discusión y resolución del Sistema

Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado a).

	Ran(A)	Ran(A*)	Nº incógnitas	Tipo de Sistema	Número de soluciones
Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $a = -2$	2	2	3	S.C.I.	Infinitas
Si $a = 1$	1	2	3	S.I.	Sin solución

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

b) Las soluciones del sistema cuando $a = -2$.

Como se puede ver el Sistema es Compatible Indeterminado. Como en el apartado anterior ya hemos utilizado el método de Gauss para obtener del Rango de A^* , podemos utilizar esa misma matriz escalonada para resolver el sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y = z = \lambda \end{cases} \longrightarrow x + \lambda - 2\lambda = 1 \longrightarrow x = 1 + \lambda$$

La solución del sistema para $a = -2$ es:

$$\begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$$

Resolución del Sistema

c) La solución del sistema cuando $a=0$.

Como se puede ver el Sistema es Compatible Determinado. Como en el apartado a) ya hemos calculado el valor del determinante de A, aprovecharemos este cálculo para resolver el sistema utilizando la regla de Cramer.

$$|A| = -a^3 + 3a - 2 \xrightarrow{a=0} |A| = -2$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

La solución del sistema para $a=0$, es:
 $x=2, y=-1, z=-1$

$$\begin{cases} x + y + az = 1 \\ x + ay + z = 1 \\ ax + y + z = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II Julio 2020



Problema 2 Geometría euclídea

El enunciado

Sea la recta: $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ y los puntos $P = (1,0,0)$ y $Q = (2,1,\alpha)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El valor de α para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r.
- b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r, cuando $\alpha=1$.
- c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r, cuando $\alpha=1$.

Solución:

Calculo el vector director de la recta que pasa por P y Q: $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (2,1,\alpha) - (1,0,0) = (1,1,\alpha)$

El vector director de la recta r, se obtiene de la forma continua directamente: $\vec{u} = (1,1,-1)$

Para que ambas rectas sean paralelas, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ deben ser iguales o proporcionales.

Esta condición se expresa matemáticamente igualando los cocientes de las componentes.

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{\alpha} \longrightarrow \boxed{\alpha=-1}$$

Ecuación del plano

Datos: $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ $P = (1,0,0)$ y $Q = (2,1,1)$.

Para calcular la ecuación del plano se necesita un punto y dos vectores directores.

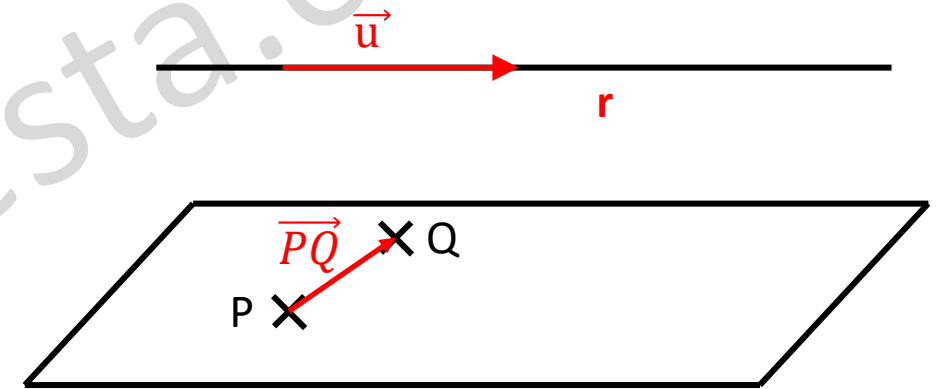
Puesto que la recta r es paralela al plano pedido, uno de los vectores directores será: $\vec{u} = (1,1,-1)$

El otro vector director será $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (1,1,1)$

Tomamos el punto $P=(1,0,0)$

Escribo la ecuación del plano en forma paramétrica:

$$\pi: \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \lambda + \mu \\ z = -\lambda + \mu \end{cases}$$



Esquema orientativo

NOTA: Se podría calcular mediante determinantes la ecuación del plano, sería igualmente correcto.

El resultado sería: $\pi: x - y - 1 = 0$ ¡COMPRUÉBALO!

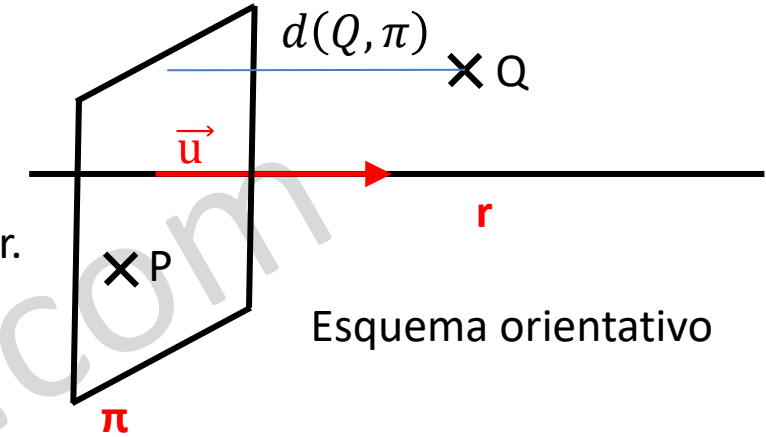
b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r , cuando $\alpha=1$.

¡PISTA! $\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

Distancia punto-plano

Datos: $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ $P = (1,0,0)$ y $Q = (2,1,1)$.

En primer lugar se calcula la ecuación del plano π que pasa por P y es perpendicular a r. Puesto que la recta r es perpendicular al plano pedido, el vector normal del plano será: $\vec{u} = \vec{n} = (1,1,-1)$



Con la ecuación del vector normal y el punto P, puedo calcular la ecuación general del plano.

$$\pi: A \cdot (x - x_0) + B \cdot (y - y_0) + C \cdot (z - z_0) = 0 \quad \text{donde } \vec{n} = (A, B, C) = (1, 1, -1) \text{ y } P = (x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 0)$$

$$\pi: 1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (y - 0) - 1 \cdot (z - 0) = 0 \longrightarrow \boxed{\pi: x + y - z - 1 = 0}$$

Ya se puede calcular la distancia del punto Q al plano π utilizando la fórmula correspondiente.

$$d(Q, \pi) = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \longrightarrow d(Q, \pi) = \frac{|1 \cdot 2 + 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-1)^2}}$$

$$\boxed{d(Q, \pi) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ unidades}}$$

c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r, cuando $\alpha=1$.

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Julio 2020



Problema 3 Análisis de funciones

El Enunciado

Se da la función real f definida por $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)}$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) El dominio y las asíntotas de la función f .
- b) La integral $\int f(x)dx$ así como la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $(2,0)$.
- c) El área de la región limitada por la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0$, $x=2$, $x=4$.

Solución:

Para calcular el dominio de $f(x)$ basta con igualar a cero el denominador. $x^2 \cdot (x - 1) = 0$

Resolvemos la ecuación. Los valores que hacen cero el denominador no pertenecen al dominio de la función $f(x)$.

$$x^2 \cdot (x - 1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \longrightarrow x = 0 \\ x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1 \end{cases} \quad \text{por lo que } \text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

Estudiaremos si la función tiene asíntota horizontal, calculando su límite cuando x tiende a infinito.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x^3 - x} = 0$$

Por ello $f(x)$ presenta una **Asíntota Horizontal en $y=0$** .

Dominio y Asíntotas

Puesto que es una función racional, debemos comprobar si hay asíntotas verticales en los valores de x que no pertenecen al dominio. Para ello se calcula el valor del límite en dichos puntos.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)} = \frac{1}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)} = \frac{2}{0} = \nexists$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Por lo tanto, **$x=0$** es asíntota vertical de $f(x)$

Por lo tanto, **$x=1$** es asíntota vertical de $f(x)$

Integrales

b) La integral $\int f(x)dx$ así como la primitiva de $f(x)$ cuya gráfica pasa por el punto $(2,0)$.

$$F(x) = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)} dx$$

La integral es de **tipo racional**. Se observa que no es inmediata y que el grado del numerador es menor que el del denominador.

Por otro lado, ya se comprobó al calcular el dominio que las **raíces** del denominador eran **reales**.

Por último, la raíz $x=0$ tiene **multiplicidad igual a 2**, por ser solución doble de la ecuación $x^2 = 0$

Por todo ello, la **factorización lineal** de la función que vamos a integrar será:

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 1} = \frac{A \cdot x \cdot (x - 1) + B \cdot (x - 1) + C \cdot x^2}{x^2 \cdot (x - 1)} \quad \text{Se igualan los numeradores.}$$

$$x^2 + 1 = A \cdot x \cdot (x - 1) + B \cdot (x - 1) + C \cdot x^2 \quad \text{Se dan valores a } x \text{ para obtener los valores de } A, B \text{ y } C.$$

$$\text{Si } x=0 \longrightarrow 1 = A \cdot 0 \cdot (0 - 1) + B \cdot (0 - 1) + C \cdot 0^2 \longrightarrow 1 = -B \longrightarrow B = -1$$

$$\text{Si } x=1 \longrightarrow 2 = A \cdot 1 \cdot (1 - 1) + B \cdot (1 - 1) + C \cdot 1^2 \longrightarrow 2 = C \longrightarrow C = 2$$

$$\text{Si } x=2 \longrightarrow 5 = A \cdot 2 \cdot (2 - 1) + B \cdot (2 - 1) + C \cdot 2^2 \longrightarrow 5 = 2A + B + 4C \longrightarrow A = -1$$

Integrales

Dado que $A=-1$, $B=-1$ y $C=2$, podemos sustituir:

$$\frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x - 1} \longrightarrow \frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)} = \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x - 1}$$

Ya podemos transformar el cociente que no es integrable directamente, en la suma de tres cocientes que se pueden integrar de forma inmediata.

$$F(x) = \int \frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)} dx = \int \frac{-1}{x} + \frac{-1}{x^2} + \frac{2}{x - 1} dx = \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{-1}{x^2} dx + \int \frac{2}{x - 1} dx$$

$$\int \frac{-1}{x} dx = -\ln|x| + C_1 \quad \int \frac{-1}{x^2} dx = \int -x^{-2} dx = -\frac{x^{-1}}{-1} = \frac{1}{x} + C_2 \quad \int \frac{2}{x - 1} dx = 2 \cdot \ln|x - 1| + C_3$$

Obteniendo por fin la función primitiva, aunque el ejercicio todavía no está terminado.

$$F(x) = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2 \cdot \ln|x - 1| + C \quad \text{Como la gráfica pasa por el punto (2,0), podemos escribir que } F(2)=0$$

$$F(2) = -\ln|2| + \frac{1}{2} + 2 \cdot \ln|2 - 1| + C = 0 \longrightarrow -\ln|2| + \frac{1}{2} + C = 0 \longrightarrow C = \ln|2| - \frac{1}{2}$$

Y escribimos la solución:

$$F(x) = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2 \cdot \ln|x - 1| + \ln|2| - \frac{1}{2}$$

Cálculo del área

c) El área de la región limitada por la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0$, $x=2$, $x=4$. $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)}$

Analizamos el signo de $f(x)$ en primer lugar.

El numerador siempre es positivo y el denominador es positivo para $x > 1$. Como nos piden el área entre 2 y 4, podemos garantizar que $f(x) > 0$ cuando x está entre 2 y 4, por ello podemos calcular el área con una sola integral.

$$A = \int_2^4 \frac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)} dx = \left[-\ln|x| + \frac{1}{x} + 2 \cdot \ln|x - 1| \right]_2^4$$

Se aplica la regla de Barrow.

$$A = \left(-\ln|4| + \frac{1}{4} + 2 \cdot \ln|4 - 1| \right) - \left(-\ln|2| + \frac{1}{2} + 2 \cdot \ln|2 - 1| \right) = -\ln|4| + \frac{1}{4} + 2 \cdot \ln|3| + \ln|2| - \frac{1}{2}$$

Podemos agrupar los logaritmos aplicando sus propiedades y obtenemos la solución.

No hace falta obtener el valor aproximado.

$$A = \ln\left(\frac{9}{2}\right) - \frac{1}{4}$$

$$2 \cdot \ln|3| + \ln|2| - \ln|4| = \ln(3)^2 + \ln(2) - \ln(4) = \ln\left(\frac{9 \cdot 2}{4}\right) = \ln\left(\frac{9}{2}\right)$$

Cálculo del área

Para que entendáis mejor el área que hemos calculado representaré la gráfica. Esto no es necesario que lo hagáis vosotros en el examen.



Podéis observar que la función va por encima del eje X en todo momento.
El área calculada es la de color rojo.

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2020



Problema 4

Álgebra matricial

El Enunciado

Se dan las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$, que dependen del parámetro real b .

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del resultado:

- a) Los valores de b para que cada una de las matrices $A \cdot B$ y $B \cdot A$ tenga inversa.
- b) Los valores de b para que la matriz $A^T \cdot A$ tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A .
- c) La inversa de $A^T \cdot A$, cuando dicha inversa exista.

Solución:

Para que una matriz tenga inversa, debe ser regular. Para ello, debe ser cuadrada y su determinante ser distinto de cero.

En primer lugar se operan las matrices:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} -1-2 & 0+2b & 2-2 \\ -b-0 & 0+0 & 2b-0 \\ 1-2 & 0+2b & -2-2 \end{pmatrix} \longrightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow B \cdot A = \begin{pmatrix} -1+0-2 & -2+0+4 \\ -1+b^2+1 & -2+0-2 \end{pmatrix} \longrightarrow B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{pmatrix}$$

Se puede observar, como ya sabíamos, que el producto de matrices no es conmutativo.

Matriz invertible

Para que una matriz tenga inversa, su determinante debe ser distinto de cero, por eso calculo el determinante de las dos matrices.

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{vmatrix} = 0$$

La matriz $A \cdot B$ no tiene inversa para ningún valor de $b \in \mathbb{R}$

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{vmatrix} = 12 - 2b^2; \quad 12 - 2b^2 = 0 \longrightarrow b = \pm\sqrt{6}$$

La matriz $B \cdot A$ tiene inversa para $b \neq \pm\sqrt{6}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{pmatrix}$$

Matriz invertible

Para resolver el apartado b) hay que hacer el mismo proceso que en el apartado a), solo que debemos calcular en primer lugar la matriz traspuesta de A. A continuación haremos el mismo proceso.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En primer lugar se operan las matrices:

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & b & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 + b^2 + 1 & 2 + 0 - 2 \\ 2 + 0 - 2 & 4 + 0 + 4 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T \cdot A = \begin{pmatrix} b^2 + 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Para que una matriz tenga inversa, su determinante debe ser distinto de cero, por eso calculo el determinante.

$$|A^T \cdot A| = \begin{vmatrix} b^2 + 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 8 \cdot (b^2 + 2) \longrightarrow 8 \cdot (b^2 + 2) \neq 0 \quad \forall b \in \mathbb{R} \longrightarrow \boxed{A^T \cdot A \text{ tiene inversa } \forall b \in \mathbb{R}}$$

Matriz inversa

Debemos calcular la inversa en función de b, ya que $A^T \cdot A$ tiene inversa para todo valor de b.

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} b^2 + 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Calcularé la matriz inversa mediante el algoritmo de los adjuntos:

1) Calculo $|A^T \cdot A|$; Ya se ha calculado anteriormente: $|A^T \cdot A| = \begin{vmatrix} b^2 + 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 8 \cdot (b^2 + 2)$

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A^T \cdot A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2 + 2 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A^T \cdot A))^T = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2 + 2 \end{pmatrix}$ **!!!No cambia por ser la matriz simétrica!!!**

4) Aplico la fórmula: $(A^T \cdot A)^{-1} = \frac{1}{|A^T \cdot A|} \cdot (Adj(A^T \cdot A))^T \longrightarrow (A^T \cdot A)^{-1} = \frac{1}{8 \cdot (b^2 + 2)} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2 + 2 \end{pmatrix}$

$$(A^T \cdot A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{8}{8 \cdot (b^2 + 2)} & 0 \\ 0 & \frac{b^2 + 2}{8 \cdot (b^2 + 2)} \end{pmatrix} \longrightarrow (A^T \cdot A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(b^2 + 2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Julio 2020



Problema 5
Geometría euclídea

El enunciado

Sea el plano: $\pi: 2x + y - z - 5 = 0$ y los puntos $A = (1, 2, -1)$ y $B = (2, 1, 0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A , B y es perpendicular a π .
- Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A . Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r .
- La distancia entre el punto B y la recta r .

Solución:

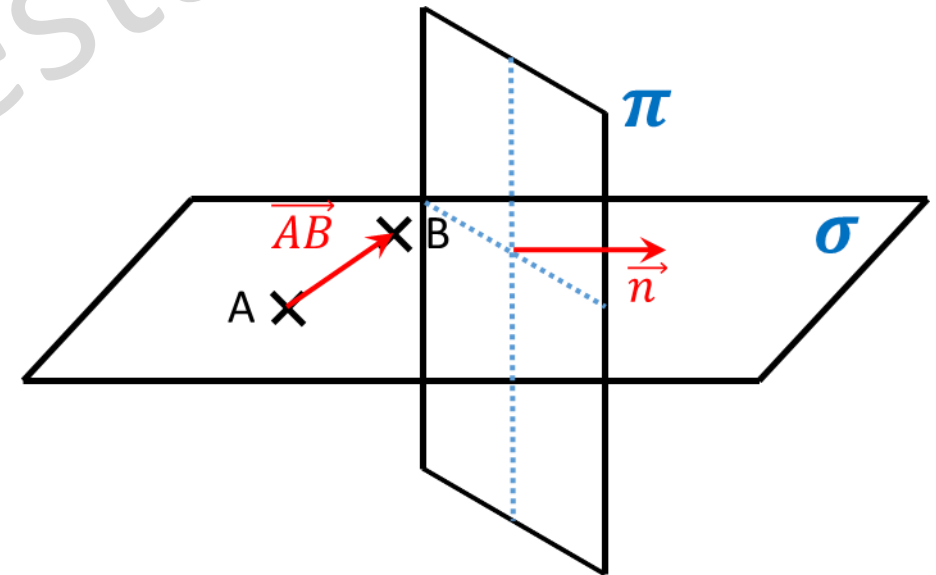
Calculo el vector director del plano que pasa por A y B :

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, 1, 0) - (1, 2, -1) = (1, -1, 1)$$

El otro vector director del plano es el vector normal del plano π :

$$\vec{u} = \vec{n} = (2, 1, -1)$$

Con los dos vectores directores del plano y un punto (A o B), ya puedo calcular la ecuación implícita del plano.



Esquema orientativo

El enunciado

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

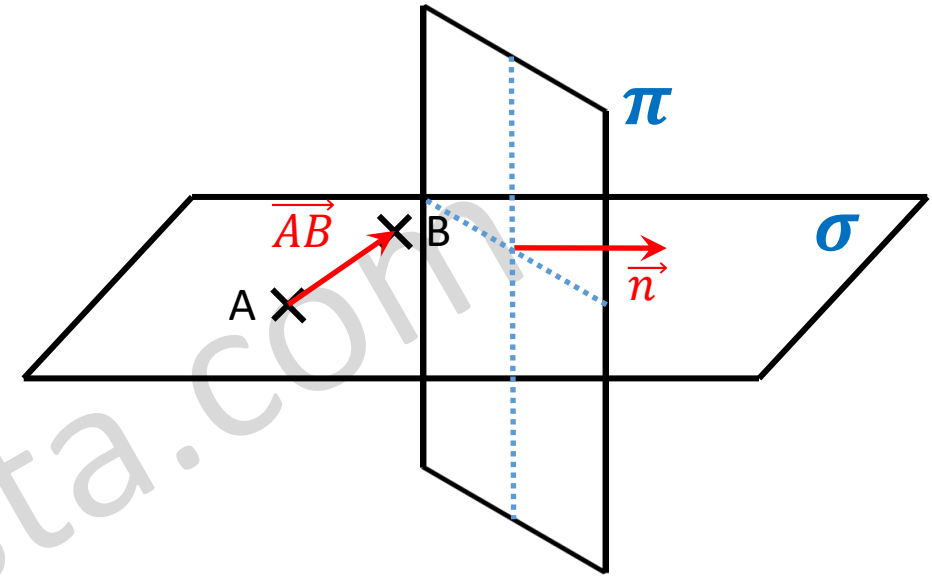
$$(x-1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (y-2) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (z+1) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1) \cdot 0 - (y-2) \cdot (-3) + (z+1) \cdot 3 = 0 \longrightarrow 3y - 6 + 3z + 3 = 0$$

$$\text{Reordenando: } 3y + 3z - 3 = 0$$

$$\text{Simplificando: } y + z - 1 = 0$$

La ecuación del plano será: $\sigma: y+z-1=0$



Esquema orientativo

Representación gráfica del apartado a

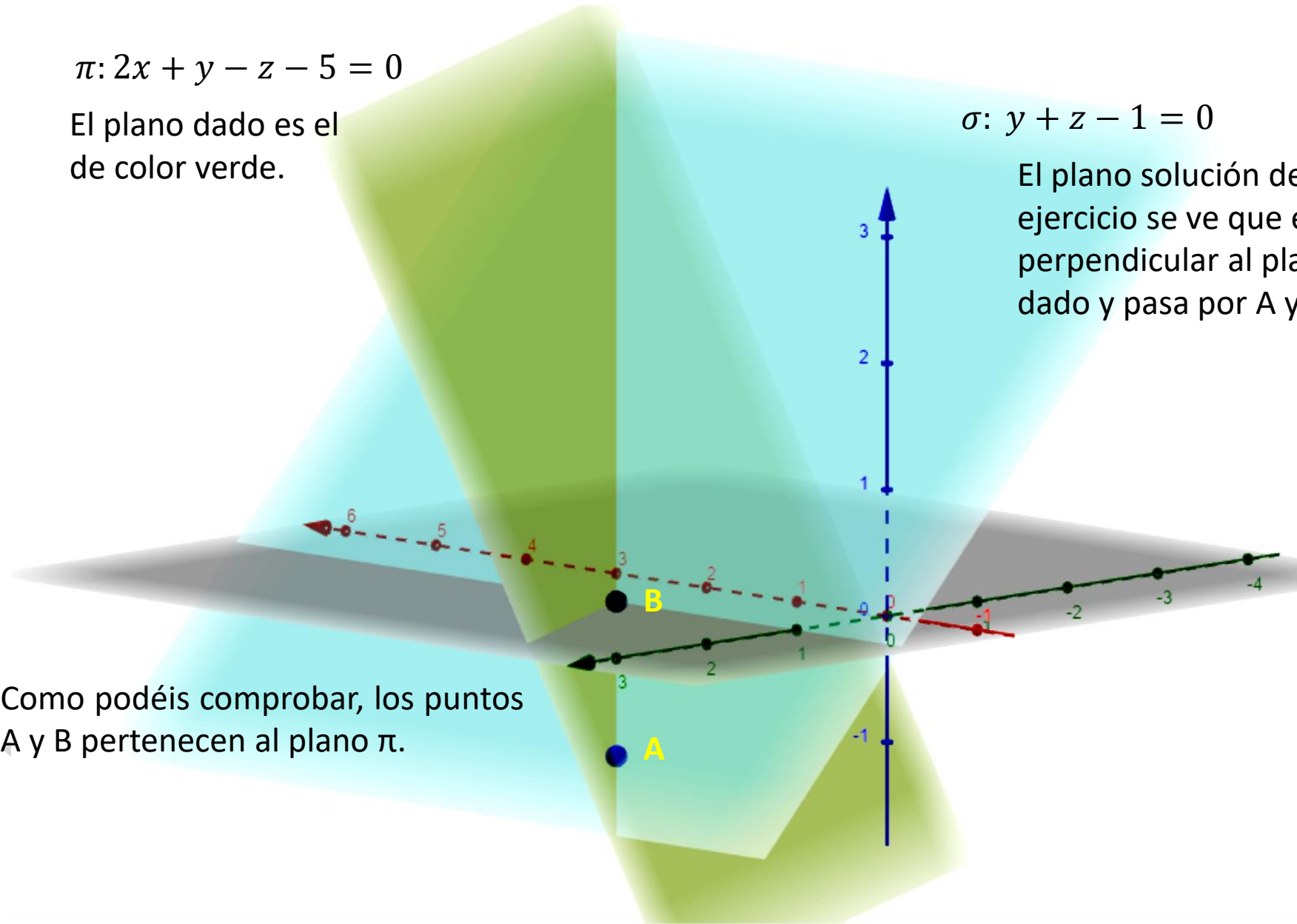
$$\pi: 2x + y - z - 5 = 0$$

El plano dado es el
de color verde.

$$\sigma: y + z - 1 = 0$$

El plano solución del
ejercicio se ve que es
perpendicular al plano
dado y pasa por A y B.

Como podéis comprobar, los puntos
A y B pertenecen al plano π .



Apartado b

b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A. Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r .

El vector director de la recta r coincide con el vector normal del plano π . $\vec{u} = \vec{n} = (2, 1, -1)$

Con el vector director y el punto $A=(1, 2, -1)$ se calcula la ecuación paramétrica de la recta. $\longrightarrow$

$$r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$$

Para encontrar dos planos cuya intersección sea la recta r , basta con expresar la ecuación de la recta en forma general.

En primer lugar expreso la ecuación de la recta de forma continua: $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1}$

Opero la primera igualdad: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} \longrightarrow x - 2y + 3 = 0$

Opero la segunda igualdad: $\frac{y-2}{1} = \frac{z+1}{-1} \longrightarrow y + z - 1 = 0$

Cada una de las ecuaciones representa cada uno de los planos pedidos.

Los planos pedidos son: $\pi_1: x - 2y + 3 = 0$ y $\pi_2: y + z - 1 = 0$

Apartado c

c) La distancia entre el punto B y la recta r. $B = (2,1,0)$ $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ La ecuación paramétrica de la recta r la he obtenido en el apartado anterior.

El método más directo es aplicar la fórmula que nos da la distancia de un punto a una recta.

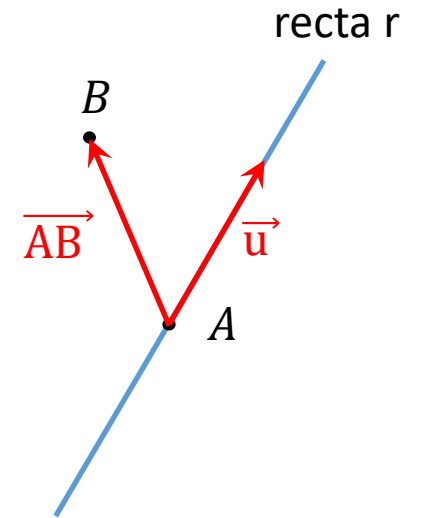
$$d_{Br} = \frac{|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{u}|}{|\overrightarrow{u}|}$$

Siendo, $\overrightarrow{u}$ el vector director de la recta r

A un punto de la recta r

B el punto al cual se calcula la distancia desde r

$\overrightarrow{AB}$ el vector que va desde A hasta B.



Esquema orientativo

Siendo el punto A de la recta r: $A = (1,2,-1)$

Calculo el vector director por A y B: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2,1,0) - (1,2,-1) = (1,-1,1)$

Siendo el vector director de la recta r: $\overrightarrow{u} = (2,1,-1)$

$$\text{Calculo } \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{u}: \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} - (-2\vec{k} - \vec{j} + \vec{i}) = 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

Apartado c

$$\text{Calculo } \overrightarrow{AB} \times \vec{u}: \quad \overrightarrow{AB} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} - (-2\vec{k} - \vec{j} + \vec{i}) = 3\vec{j} + 3\vec{k}$$

$$\text{Calculo } |\overrightarrow{AB} \times \vec{u}|: \quad |\overrightarrow{AB} \times \vec{u}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\text{Calculo } |\vec{u}|: \quad |\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

Ya podemos terminar el cálculo:

$$d_{Br} = \frac{|(1, -1, 1) \times (2, 1, -1)|}{|(2, 1, -1)|} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}$$

La distancia del punto B a la recta r es $\sqrt{3}$ unidades de longitud.

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Julio 2020



Problema 6

Problema de optimización

El enunciado

En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

- a) La expresión del área $A(x)$ del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado.
- b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $A(x)$, $0 \leq x \leq 20$.
- c) La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área.

Solución:

En primer lugar se hace un esquema de la situación:

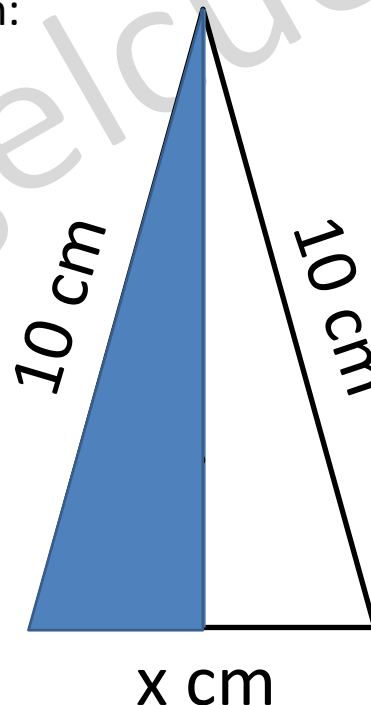
Y se relacionan las dos variables x e y :

Aplico el teorema de Pitágoras:

$$10^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2$$

Despejo y :

$$y = \sqrt{10^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$



Obteniendo la función

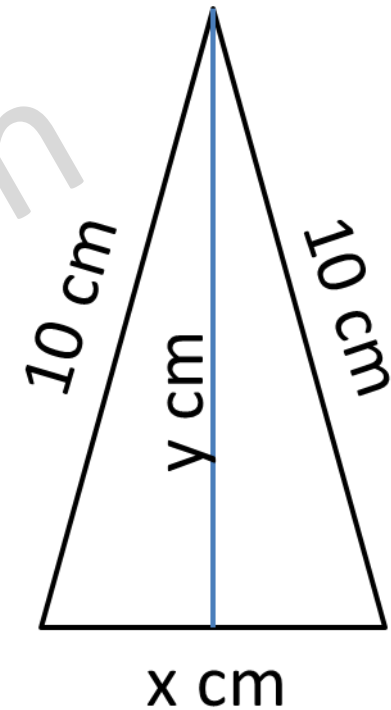
Una vez expresada la altura en función de x: $y = \sqrt{10^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$

Ya podemos calcular el área del triángulo:

$$A = \frac{x \cdot y}{2} \rightarrow A = \frac{x \cdot \sqrt{10^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{100 - \frac{x^2}{4}}}{2} = \frac{\sqrt{100 \cdot x^2 - \frac{x^4}{4}}}{2}$$
$$A = \frac{\sqrt{\frac{400 \cdot x^2 - x^4}{4}}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{400 \cdot x^2 - x^4}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{400 \cdot x^2 - x^4}}{4}$$

El área del triángulo en función del lado desigual es:

$$A(x) = \frac{\sqrt{400 \cdot x^2 - x^4}}{4}$$



Monotonía de la función

b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $A(x)$, $0 \leq x \leq 20$.

$$A(x) = \frac{\sqrt{400x^2 - x^4}}{4}$$

Para el estudio de la monotonía se debe derivar la función:

$$A'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{800x - 4x^3}{2 \cdot \sqrt{400x^2 - x^4}} = \frac{200x - x^3}{2 \cdot \sqrt{400x^2 - x^4}}$$

Se iguala a cero la función derivada:

$$\frac{200x - x^3}{2 \cdot \sqrt{400x^2 - x^4}} = 0 \longrightarrow 200x - x^3 = 0 \longrightarrow x \cdot (200 - x^2) = 0$$

$x = 0$
 $200 - x^2 = 0 \longrightarrow x = \pm\sqrt{200}$
 $x = \sqrt{200}$

Se hace un estudio de signos de la derivada $A'(x)$:

	0	$\sqrt{200}$	20
$A(x)$			
$A'(x)$	+		-

$A(x)$ es creciente si $x \in [0, \sqrt{200})$

$A(x)$ es decreciente si $x \in (\sqrt{200}, 20]$

El máximo relativo de $f(x)$ está en $x = \sqrt{200}$.

OJO DOMINIO

También puedes escribir $10\sqrt{2}$
©Angel Cuesta Arza

Cálculo de la longitud del lado que maximiza el área

c) La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área.

El máximo relativo de $f(x)$ está en $x = \sqrt{200}$.

Se sustituye en la función $A(x)$ para calcular el área.

$$A(\sqrt{200}) = \frac{\sqrt{400 \cdot (\sqrt{200})^2 - (\sqrt{200})^4}}{4} = \frac{\sqrt{400 \cdot 200 - 200^2}}{4} = 50$$

$$A(x) = \frac{\sqrt{400x^2 - x^4}}{4}$$

La longitud del tercer lado debe ser $\sqrt{200}$ cm y el área del triángulo es 50 cm².