Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II
Julio 2020

Problema 1
Discusión de un sistema de ecuaciones

El Enunciado

Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y+\boldsymbol{a}z=1 \\ x+\boldsymbol{a}y+z=1 \\ \boldsymbol{a}x+y+z=-2 \end{cases}$ Donde $\boldsymbol{a}$ es un parámetro real. **Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) El estudio del sistema en función del parámetro **a**.

b) Las soluciones del sistema cuando **a=−2**.

c) La solución del sistema cuando **a=0**.

Solución:

Para discutir el sistema de ecuaciones se utilizará el teorema de Rouché

Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{a} \\ 1 & \boldsymbol{a} & 1 \\ \boldsymbol{a} & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad A^*=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{a} & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a} & 1 & 1 \\ \boldsymbol{a} & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculo del rango de A en función de $\boldsymbol{a}$ utilizando su determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{a} \\ 1 & \boldsymbol{a} & 1 \\ \boldsymbol{a} & 1 & 1 \end{vmatrix}=-a^3+3a-2;\ -a^3+3a-2=0 \longrightarrow (a-1)\cdot(-a^2-a+2)=0 \longrightarrow \boxed{\begin{cases} a=-2 \\ a=1 \end{cases}}$$

Si $a\neq-2$ y $a\neq 1$ entonces $|A|\neq 0$, **Ran**$(\boldsymbol{A})=\mathbf{3}$ $\longrightarrow$ **Ran**$(\boldsymbol{A}^*)=\mathbf{3}$

Si $a=-2$ o $a=1$ entonces $|A|=0$, **Ran**$(\boldsymbol{A})<\mathbf{3}$ $\longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A* sustituyendo los valores de a en las matrices.

En esta ocasión, calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A* utilizando el método de Gauss para los valores concretos de $\boldsymbol{a}$. También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

Discusión del Sistema

$$\begin{cases} x + y + \boldsymbol{a}z = 1 \\ x + \boldsymbol{a}y + z = 1 \\ \boldsymbol{a}x + y + z = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{a} \\ 1 & \boldsymbol{a} & 1 \\ \boldsymbol{a} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{a} & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a} & 1 & 1 \\ \boldsymbol{a} & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Si $a = -2 \longrightarrow A^* = \left(\begin{array}{c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & \boldsymbol{-2} \\ 1 & \boldsymbol{-2} & 1 \\ \boldsymbol{-2} & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{matrix}\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{-2} & 1 \\ 1 & \boldsymbol{-2} & 1 & 1 \\ \boldsymbol{-2} & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3+2F_1]{F_2=F_2-F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{-2} & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3+F_2} \left(\begin{array}{c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & \boldsymbol{-2} \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right)$$

Al finalizar el método de Gauss se observa que tanto A como A* tienen dos filas linealmente independientes, por lo que para $a = -2$, **Ran**$(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{2}$ y **Ran**$(\boldsymbol{A}^*) = \boldsymbol{2}$

Si $a = 1 \longrightarrow A^* = \left(\begin{array}{c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{matrix}}_{A} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{matrix}\right)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=F_3-F_1]{F_2=F_2-F_1} \left(\begin{array}{c} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{matrix}\right)$$

Al finalizar el método de Gauss se observa que A sólo tiene una fila linealmente independiente, por ello para $a = 1$, **Ran**$(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{1}$

En cambio, A* tiene dos filas linealmente independientes, por lo que para $a = 1$, **Ran**$(\boldsymbol{A}^*) = \boldsymbol{2}$

Discusión y resolución del Sistema

$$\begin{cases} x + y + \boldsymbol{a}z = 1 \\ x + \boldsymbol{a}y + z = 1 \\ \boldsymbol{a}x + y + z = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{a} \\ 1 & \boldsymbol{a} & 1 \\ \boldsymbol{a} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{a} & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a} & 1 & 1 \\ \boldsymbol{a} & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado a).

	Ran(A)	**Ran(A*)**	**Nº incógnitas**	**Tipo de Sistema**	**Número de soluciones**
Si $a \neq -2$ **y** $a \neq 1$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $a = -2$	2	2	3	S.C.I.	Infinitas
Si $a = 1$	1	2	3	S.I.	Sin solución

b) Las soluciones del sistema cuando **a=−2**.

Como se puede ver el Sistema es Compatible Indeterminado. Como en el apartado anterior ya hemos utilizado el método de Gauss para obtener del Rango de A*, podemos utilizar esa misma matriz escalonada para resolver el sistema.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{-2} & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + y - 2z = 1 \\ y = z = \boldsymbol{\lambda} \end{cases} \longrightarrow x + \boldsymbol{\lambda} - 2\boldsymbol{\lambda} = 1 \longrightarrow x = 1 + \boldsymbol{\lambda}$$

La solución del sistema para $a = -2$ es: $\boxed{\begin{cases} x = 1 + \boldsymbol{\lambda} \\ y = \boldsymbol{\lambda} \\ z = \boldsymbol{\lambda} \end{cases}}$

Resolución del Sistema

c) La solución del sistema cuando **a=0**.

Como se puede ver el Sistema es Compatible Determinado. Como en el *apartado a)* ya hemos calculado el valor del determinante de A, aprovecharemos este cálculo para resolver el sistema utilizando la regla de Cramer.

$$|A| = -a^3 + 3a - 2 \xrightarrow{a=0} |A| = -2$$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}}{-2} = \frac{2}{-2} = -1$$

La solución del sistema para a=0, es:
x=2, y=-1, z=-1

$$\begin{cases} x + y + \boldsymbol{a}z = 1 \\ x + \boldsymbol{a}y + z = 1 \\ \boldsymbol{a}x + y + z = -2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{a} \\ 1 & \boldsymbol{a} & 1 \\ \boldsymbol{a} & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \boldsymbol{a} & 1 \\ 1 & \boldsymbol{a} & 1 & 1 \\ \boldsymbol{a} & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$