# Selectividad Comunidad Valenciana

## Matemáticas II
## Julio 2020



## Problema 2
## Geometría euclídea

# El enunciado

Sea la recta: $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$ y los puntos $P = (1,0,0)\ y\ Q = (2,1,\alpha)$.

**Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:**

a) El valor de α para que la recta que pasa por P y Q sea paralela a r.

b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r, cuando α=1.

c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r, cuando α=1.

Solución:

Calculo el vector director de la recta que pasa por P y Q: $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (2,1,\alpha) - (1,0,0) = (1,1,\alpha)$

El vector director de la recta r, se obtiene de la forma continua directamente: $\vec{u} = (1,1,-1)$

Para que ambas rectas sean paralelas, los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ deben ser iguales o proporcionales.

Esta condición se expresa matemáticamente igualando los cocientes de las componentes.

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{\alpha} \longrightarrow \boxed{\alpha = -1}$$

# Ecuación del plano

Datos: $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{-1}$ $\quad P = (1,0,0)\ y\ Q = (2,1,1).$

Para calcular la ecuación del plano se necesita un punto y dos vectores directores.

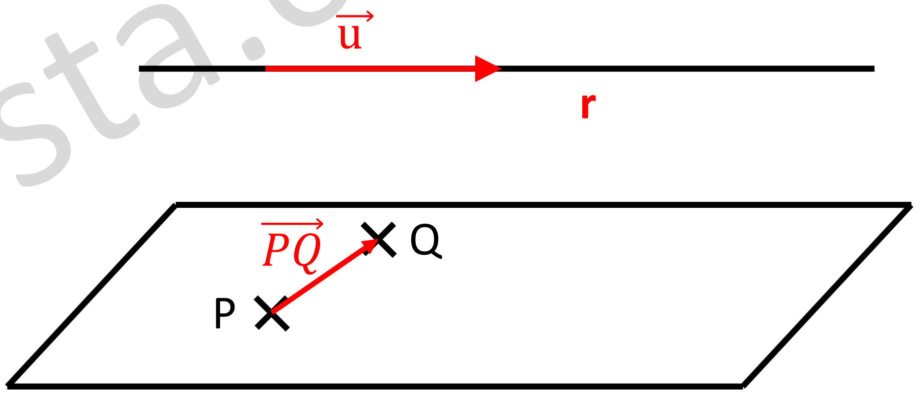
Puesto que la recta r es paralela al plano pedido, uno de los vectores directores será: $\vec{\mathrm{u}} = (1,1,-1)$

El otro vector director será $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = (1,1,1)$

Tomamos el punto P=(1,0,0)

Escribo la ecuación del plano en forma paramétrica:

$$\boxed{\pi: \begin{cases} x = 1 + \lambda + \mu \\ y = \quad \lambda + \mu \\ z = \quad -\lambda + \mu \end{cases}}$$




Esquema orientativo



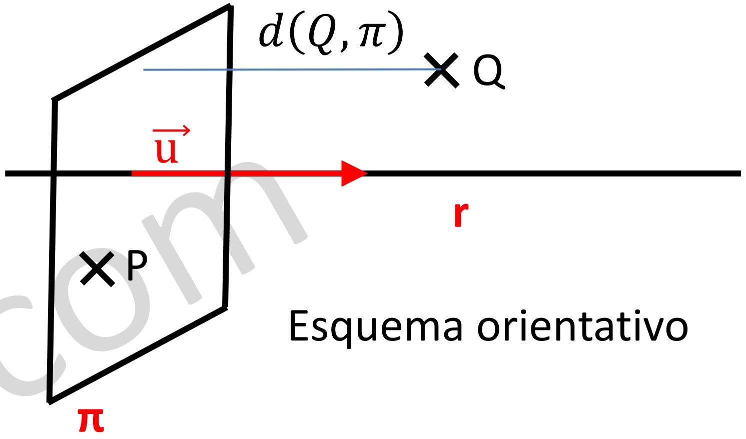
**NOTA**: Se podría calcular mediante determinantes la ecuación del plano, sería igualmente correcto.

El resultado sería: $\boxed{\pi: x - y - 1 = 0}$ ¡COMPRUÉBALO!

¡PISTA! $\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

b) La ecuación del plano que contiene a P y Q y es paralelo a r, cuando α=1.

# Distancia punto-plano



Esquema orientativo

Datos: $r: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{-1}$ $\quad P = (1,0,0)\ y\ Q = (2,1,1).$

En primer lugar se calcula la ecuación del plano π que pasa por P y es perpendicular a r.

Puesto que la recta r es perpendicular al plano pedido, el vector normal del plano será: $\vec{u} = \vec{n} = (1,1,-1)$

Con la ecuación del vector normal y el punto P, puedo calcular la ecuación general del plano.

$\pi\!: A\cdot(x-x_0) + B\cdot(y-y_0) + C\cdot(z-z_0) = 0$ donde $\vec{n} = (A,B,C) = (1,1,-1)$ y P=$(x_0, y_0, z_0)$=(1,0,0)

$$\pi\!: 1\cdot(x-1) + 1\cdot(y-0) - 1\cdot(z-0) = 0 \longrightarrow \boxed{\pi\!: x+y-z-1=0}$$

Ya se puede calcular la distancia del punto Q al plano π utilizando la fórmula correspondiente.

$$d(Q,\pi) = \frac{|A\cdot x_0 + B\cdot y_0 + C\cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \longrightarrow d(Q,\pi) = \frac{|1\cdot 2 + 1\cdot 1 - 1\cdot 1 - 1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}$$

$$\boxed{d(Q,\pi) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}\ unidades}$$

c) La distancia del punto Q al plano que pasa por P y es perpendicular a r, cuando α=1.