Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II
Julio 2020

www.angelcuesta.com

Problema 3
Análisis de funciones

©Angel Cuesta Arza

El Enunciado

Se da la función real f definida por $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2 \cdot (x-1)}$

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) El dominio y las asíntotas de la función f.

b) La integral $\int f(x)dx$ así como la primitiva de f(x) cuya gráfica pasa por el punto (2,0).

c) El área de la región limitada por la curva y=f(x) y las rectas y=0, x=2, x=4.

Solución:

Para calcular el dominio de $f(x)$ basta con igualar a cero el denominador. $x^2 \cdot (x-1) = 0$

Resolvemos la ecuación. Los valores que hacen cero el denominador no pertenecen al dominio de la función f(x).

$$x^2 \cdot (x-1) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \longrightarrow x = 0 \\ x-1 = 0 \longrightarrow x = 1 \end{cases}$$

por lo que **Dom f(x)=R−{0,1}**

Estudiaremos si la función tiene asíntota horizontal, calculando su límite cuando x tiende a infinito.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^2 \cdot (x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x^3-x} = 0$$

Por ello f(x) presenta una **Asíntota Horizontal en y=0**.

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

Dominio y Asíntotas

Puesto que es una función racional, debemos comprobar si hay asíntotas verticales en los valores de x que no pertenecen al dominio. Para ello se calcula el valor del límite en dichos puntos.

$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+1}{x^2 \cdot (x-1)} = \frac{1}{0} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2+1}{x^2 \cdot (x-1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{x^2+1}{x^2 \cdot (x-1)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

Por lo tanto, **x=0** es asíntota vertical de f(x)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+1}{x^2 \cdot (x-1)} = \frac{2}{0} = \nexists$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^2+1}{x^2 \cdot (x-1)} = \frac{2}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2+1}{x^2 \cdot (x-1)} = \frac{2}{0^-} = -\infty$$

Por lo tanto, **x=1** es asíntota vertical de f(x)

www.angelcuesta.com

Integrales

b) La integral $\int f(x)dx$ así como la primitiva de f(x) cuya gráfica pasa por el punto (2,0).

$$F(x) = \int \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}dx$$

La integral es de **tipo racional**. Se observa que no es inmediata y que el grado del numerador es menor que el del denominador.

Por otro lado, ya se comprobó al calcular el dominio que las **raíces** del denominador eran **reales**.

Por último, la raíz x=0 tiene **multiplicidad igual a 2**, por ser solución doble de la ecuación $x^2 = 0$

Por todo ello, **la factorización lineal** de la función que vamos a integrar será:

$$\frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{A\cdot x\cdot(x-1)+B\cdot(x-1)+C\cdot x^2}{x^2\cdot(x-1)}$$

Se igualan los numeradores.

$$x^2+1 = A\cdot x\cdot(x-1)+B\cdot(x-1)+C\cdot x^2$$

Se dan valores a x para obtener los valores de A, B y C.

Si x=0 $\longrightarrow$ $1 = A\cdot 0\cdot(0-1)+B\cdot(0-1)+C\cdot 0^2 \longrightarrow 1 = -B \longrightarrow B = -1$

Si x=1 $\longrightarrow$ $2 = A\cdot 1\cdot(1-1)+B\cdot(1-1)+C\cdot 1^2 \longrightarrow 2 = C \longrightarrow C = 2$

Si x=2 $\longrightarrow$ $5 = A\cdot 2\cdot(2-1)+B\cdot(2-1)+C\cdot 2^2 \longrightarrow 5 = 2A+B+4C \longrightarrow A = -1$

©Angel Cuesta Arza

www.angelcuesta.com

Integrales

Dado que A=−1, B=−1 y C=2, podemos sustituir:

$$\frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1} \longrightarrow \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}=\frac{-1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{2}{x-1}$$

Ya podemos transformar el cociente que no es integrable directamente, en la suma de tres cocientes que se pueden integrar de forma inmediata.

$$F(x)=\int\frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}dx=\int\frac{-1}{x}+\frac{-1}{x^2}+\frac{2}{x-1}\,dx=\int\frac{-1}{x}\,dx+\int\frac{-1}{x^2}\,dx+\int\frac{2}{x-1}dx$$

$$\int\frac{-1}{x}\,dx=-Ln|x|+C_1 \qquad \int\frac{-1}{x^2}\,dx=\int -x^{-2}\,dx=-\frac{x^{-1}}{-1}=\frac{1}{x}+C_2 \qquad \int\frac{2}{x-1}dx=2\cdot Ln|x-1|+C_3$$

Obteniendo por fin la función primitiva, aunque el ejercicio todavía no está terminado.

$$F(x)=-Ln|x|+\frac{1}{x}+2\cdot Ln|x-1|+C$$

Como la gráfica pasa por el punto (2,0), podemos escribir que F(2)=0

$$F(2)=-Ln|2|+\frac{1}{2}+2\cdot Ln|2-1|+C=0 \longrightarrow -Ln|2|+\frac{1}{2}+C=0 \longrightarrow C=Ln|2|-\frac{1}{2}$$

Y escribimos la solución: $\boxed{F(x)=-Ln|x|+\frac{1}{x}+2\cdot Ln|x-1|+Ln|2|-\frac{1}{2}}$

©Angel Cuesta Arza

www.angelcuesta.com

Cálculo del área

c) El área de la región limitada por la curva y=f(x) y las rectas y=0, x=2, x=4.

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}$$

Analizamos el signo de f(x) en primer lugar.

El numerador siempre es positivo y el denominador es positivo para x>1. Como nos piden el área entre 2 y 4, podemos garantizar que f(x)>0 cuando x está entre 2 y 4, por ello podemos calcular el área con una sola integral.

$$A = \int_2^4 \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}\,dx = \left[-Ln|x| + \frac{1}{x} + 2\cdot Ln|x-1|\right]_2^4$$

Se aplica la regla de Barrow.

$$A = \left(-Ln|4| + \frac{1}{4} + 2\cdot Ln|4-1|\right) - \left(-Ln|2| + \frac{1}{2} + 2\cdot \cancel{Ln|2-1|}\right) = -Ln|4| + \frac{1}{4} + 2\cdot Ln|3| + Ln|2| - \frac{1}{2}$$

Podemos agrupar los logaritmos aplicando sus propiedades y obtenemos la solución.

No hace falta obtener el valor aproximado.

$$\boxed{A = Ln\left(\frac{9}{2}\right) - \frac{1}{4}}$$

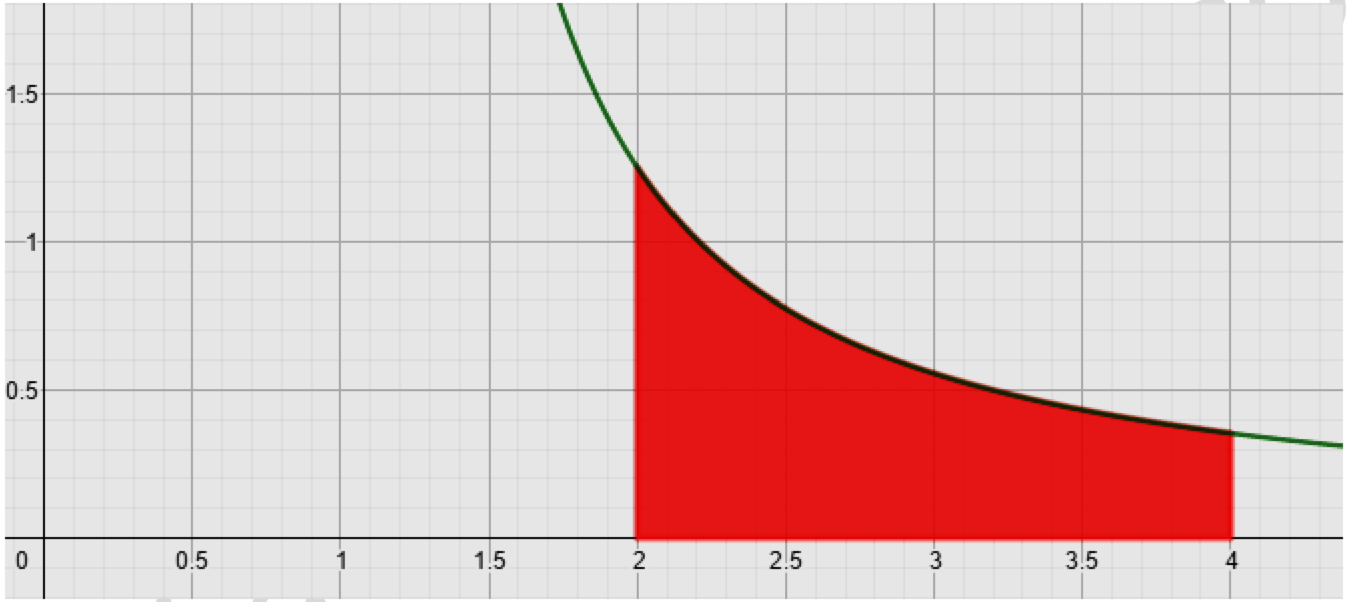
$$2\cdot Ln|3| + Ln|2| - Ln|4| = Ln(3)^2 + Ln(2) - Ln(4) = Ln\left(\frac{9\cdot 2}{4}\right) = Ln\left(\frac{9}{2}\right)$$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

Cálculo del área

Para que entendáis mejor el área que hemos calculado representaré la gráfica. Esto no es necesario que lo hagáis vosotros en el examen.



Podéis observar que la función va por encima del eje X en todo momento.

El área calculada es la de color rojo.

©Angel Cuesta Arza