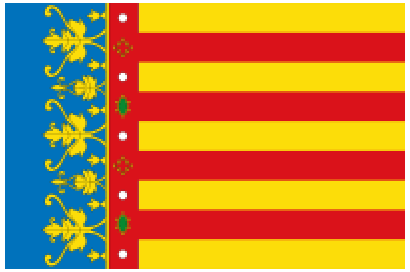
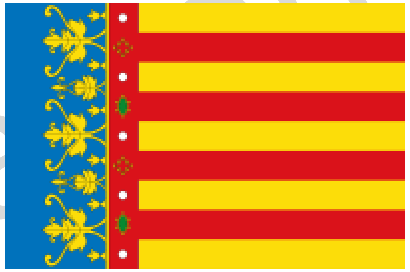
Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2020



Problema 4

Álgebra matricial

El Enunciado

Se dan las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix}$, que dependen del parámetro real b.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del resultado:

a) Los valores de b para que cada una de las matrices A·B y B·A tenga inversa.

b) Los valores de b para que la matriz A^T·A tenga inversa, siendo A^T la matriz traspuesta de A.

c) La inversa de A^T·A, cuando dicha inversa exista.

Solución:

Para que una matriz tenga inversa, debe ser regular. Para ello, debe ser cuadrada y su determinante ser distinto de cero.

En primer lugar se operan las matrices:

$$\mathrm{A} \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} -1-2 & 0+2b & 2-2 \\ -b-0 & 0+0 & 2b-0 \\ 1-2 & 0+2b & -2-2 \end{pmatrix} \longrightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & b & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow B \cdot A = \begin{pmatrix} -1+0-2 & -2+0+4 \\ -1+b^2+1 & -2+0-2 \end{pmatrix} \longrightarrow B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{pmatrix}$$

Se puede observar, como ya sabíamos, que el producto de matrices no es conmutativo.

Matriz invertible

Para que una matriz tenga inversa, su determinante desde ser distinto de cero, por eso calculo el determinante de las dos matrices.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} -3 & 2b & 0 \\ -b & 0 & 2b \\ -1 & 2b & -4 \end{vmatrix} = 0$$

La matriz A·B no tiene inversa para ningún valor de b∈R

$$|B \cdot A| = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ b^2 & -4 \end{vmatrix} = 12 - 2b^2; \ \ 12 - 2b^2 = 0 \longrightarrow b = \pm\sqrt{6}$$

La matriz B·A tiene inversa para $b \neq \pm\sqrt{6}$

Matriz invertible

Para resolver el apartado b) hay que hacer el mismo proceso que en el apartado a), solo que debemos calcular en primer lugar la matriz traspuesta de A. A continuación haremos el mismo proceso.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{b} & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

En primer lugar se operan las matrices:

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{b} & -1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ b & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 + b^2 + 1 & 2 + 0 - 2 \\ 2 + 0 - 2 & 4 + 0 + 4 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T \cdot A = \begin{pmatrix} b^2 + 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Para que una matriz tenga inversa, su determinante desde ser distinto de cero, por eso calculo el determinante.

$$|A^T \cdot A| = \begin{vmatrix} b^2 + 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 8 \cdot (b^2 + 2) \longrightarrow 8 \cdot (b^2 + 2) \neq 0 \quad \forall b \in R \longrightarrow \boxed{A^T \cdot A \text{ tiene inversa } \forall b \in R}$$

Matriz inversa

$$A^T \cdot A = \begin{pmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Debemos calcular la inversa en función de b, ya que $A^T \cdot A$ tiene inversa para todo valor de b.

Calcularé la matriz inversa mediante el algoritmo de los adjuntos:

1) Calculo $|A^T \cdot A|$; Ya se ha calculado anteriormente: $|A^T \cdot A| = \begin{vmatrix} b^2+2 & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 8 \cdot (b^2+2)$

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A^T \cdot A) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A^T \cdot A))^T = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix}$ ¡¡¡No cambia por ser la matriz simétrica!!!

4) Aplico la fórmula: $(A^T \cdot A)^{-1} = \frac{1}{|A^T \cdot A|} \cdot \left(Adj(A^T \cdot A)\right)^T \longrightarrow (A^T \cdot A)^{-1} = \frac{1}{8 \cdot (b^2+2)} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & b^2+2 \end{pmatrix}$

$$(A^T \cdot A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\cancel{8}}{\cancel{8} \cdot (b^2+2)} & 0 \\ 0 & \frac{\cancel{b^2+2}}{8 \cdot \cancel{(b^2+2)}} \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{(A^T \cdot A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(b^2+2)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}}$$