Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II

Julio 2020

Problema 5

Geometría euclídea

El enunciado

Sea el plano: $\pi: 2x + y - z - 5 = 0$ y los puntos $A = (1,2,-1)$ y $B = (2,1,0)$.

Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

a) La ecuación implícita del plano que pasa por los puntos A, B y es perpendicular a π.

b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A. Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r.

c) La distancia entre el punto B y la recta r.

Solución:

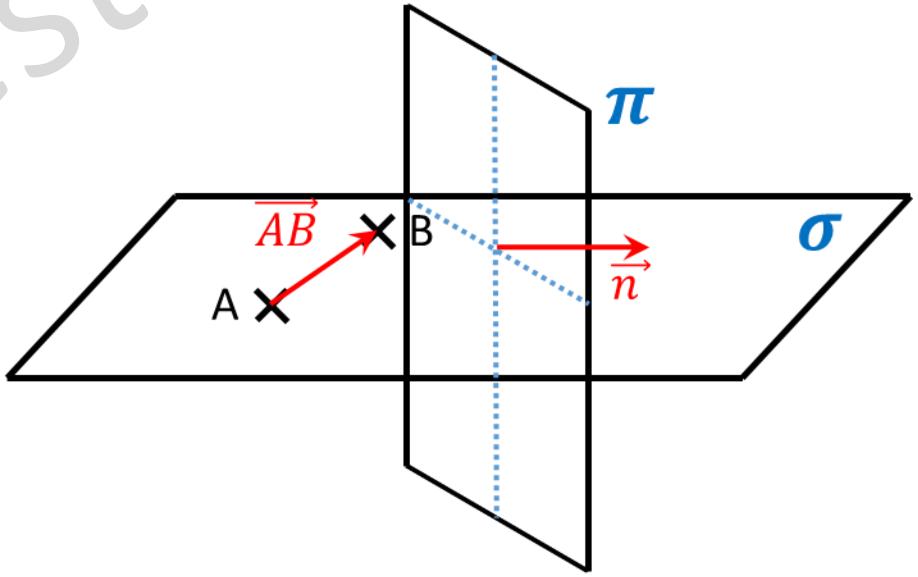
Calculo el vector director del plano que pasa por A y B:

$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2,1,0) - (1,2,-1) = (1,-1,1)$$

El otro vector director del plano es el vector normal del plano π:

$$\vec{u} = \vec{n} = (2,1,-1)$$

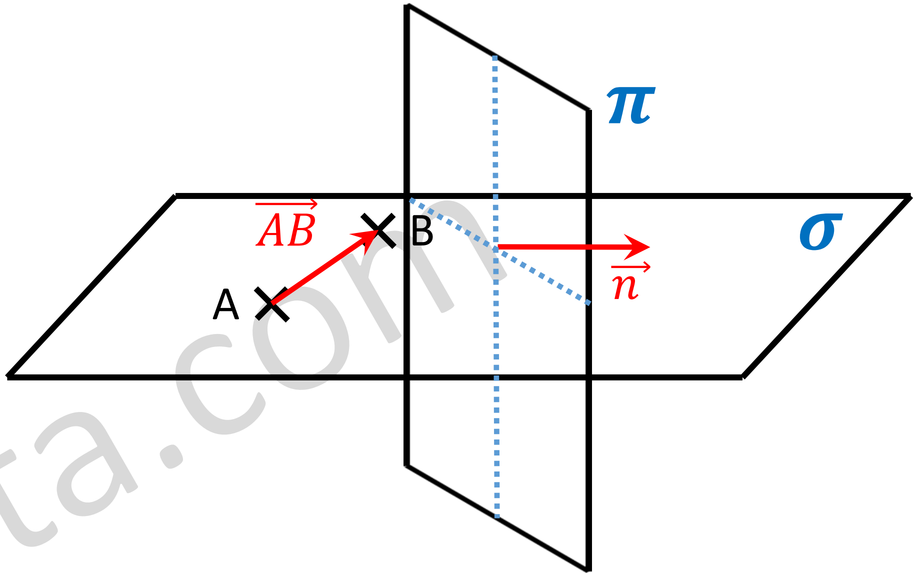
Con los dos vectores directores del plano y un punto (A o B), ya puedo calcular la ecuación implícita del plano.



Esquema orientativo

El enunciado

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$



Esquema orientativo

$$(x-1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (y-2)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + (z+1)\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1)\cdot 0 - (y-2)\cdot(-3) + (z+1)\cdot 3 = 0 \longrightarrow 3y - 6 + 3z + 3 = 0$$

Reordenando: $3y + 3z - 3 = 0$

Simplificando: $y + z - 1 = 0$

La ecuación del plano será: σ:y+z-1=0

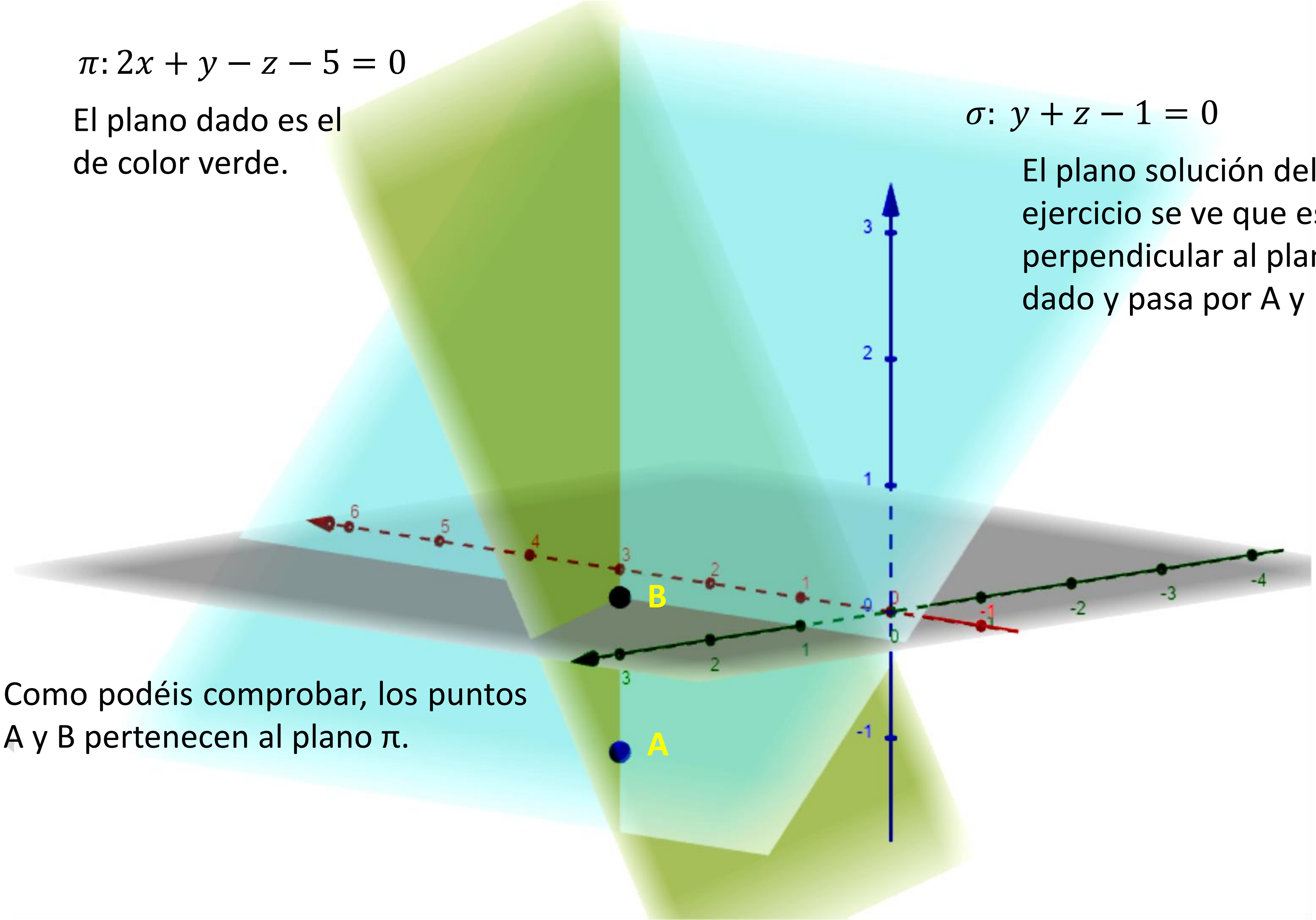
Representación gráfica del apartado a

$\pi: 2x + y - z - 5 = 0$

El plano dado es el de color verde.

$\sigma: \; y + z - 1 = 0$

El plano solución del ejercicio se ve que es perpendicular al plano dado y pasa por A y B.



Como podéis comprobar, los puntos A y B pertenecen al plano π.

Apartado b

b) Las ecuaciones paramétricas de la recta r que es perpendicular a π y pasa por A. Encuentra dos planos cuya intersección sea la recta r.

El vector director de la recta r coincide con el vector normal del plano π. $\vec{u} = \vec{n} = (2,1,-1)$

Con el vector director y el punto A=(1,2,−1) se calcula la ecuación paramétrica de la recta. $\longrightarrow$ $\boxed{r:\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases}}$

Para encontrar dos planos cuya intersección sea la recta r, basta con expresar la ecuación de la recta en forma general.

En primer lugar expreso la ecuación de la recta de forma continua: $\mathrm{r}: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-1}$

Opero la primera igualdad: $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-2}{1} \longrightarrow x - 2y + 3 = 0$

Opero la segunda igualdad: $\dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z+1}{-1} \longrightarrow y + z - 1 = 0$

Cada una de las ecuaciones representa cada uno de los planos pedidos.

$\boxed{\text{Los planos pedidos son: } \pi_1: x-2y+3=0 \quad \text{y } \pi_2: y+z-1=0}$

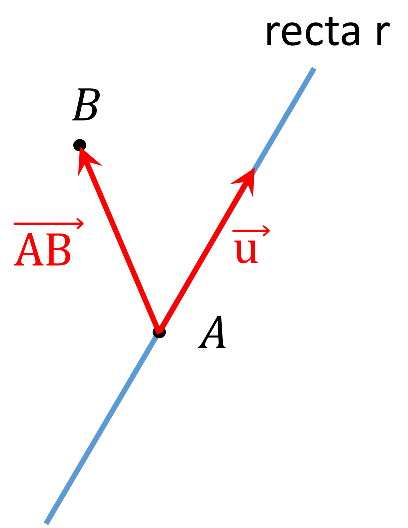
Apartado c

c) La distancia entre el punto B y la recta r. $B=(2,1,0)$ $r:\begin{cases}x=1+2\lambda\\ y=2+\lambda\\ z=-1-\lambda\end{cases}$ La ecuación paramétrica de la recta ***r*** la he obtenido en el apartado anterior.

El método más directo es aplicar la fórmula que nos da la distancia de un punto a una recta.

$$d_{Br}=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\vec{u}\right|}{|\vec{u}|}$$

Siendo, $\vec{u}$ el vector director de la recta r
A un punto de la recta r
B el punto al cual se calcula la distancia desde r
$\overrightarrow{AB}$ el vector que va desde A hasta B.



Esquema orientativo

Siendo el punto A de la recta r: $A=(1,2,-1)$

Calculo el vector director por A y B: $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(2,1,0)-(1,2,-1)=(1,-1,1)$

Siendo el vector director de la recta r: $\vec{u}=(2,1,-1)$

Calculo $\overrightarrow{AB}\times\vec{u}$: $\overrightarrow{AB}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\1&-1&1\\2&1&-1\end{vmatrix}=\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}-(-2\vec{k}-\vec{j}+\vec{i})=3\vec{j}+3\vec{k}$

Apartado c

Calculo $\overrightarrow{AB} \times \vec{u}$: $\quad \overrightarrow{AB} \times \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} - (-2\vec{k} - \vec{j} + \vec{i}) = 3\vec{j} + 3\vec{k}$

Calculo $|\overrightarrow{AB} \times \vec{u}|$: $\quad |\overrightarrow{AB} \times \vec{u}| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Calculo $|\vec{u}|$: $\quad |\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

Ya podemos terminar el cálculo:

$$d_{Br} = \frac{|(1,-1,1) \times (2,1,-1)|}{|(2,1,-1)|} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3}$$

La distancia del punto B a la recta r es $\sqrt{3}$ unidades de longitud.