Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II

Julio 2020

www.angelcuesta.com

Problema 6

Problema de optimización

©Angel Cuesta Arza

El enunciado

En un triángulo isósceles, los dos lados iguales miden 10 centímetros cada uno.
Obtener razonadamente, escribiendo todos los pasos del razonamiento utilizado:

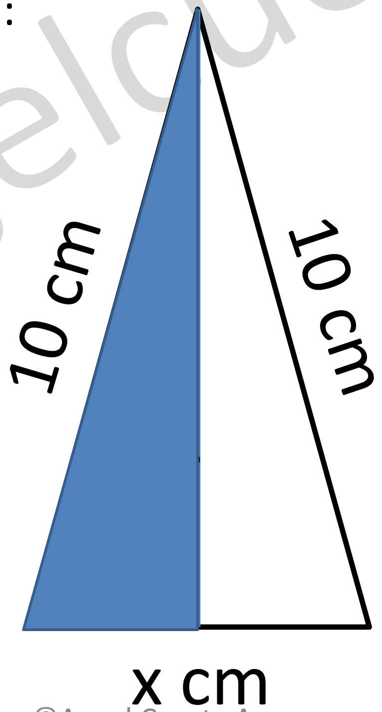
a) La expresión del área $A(x)$ del triángulo, en función de la longitud x del tercer lado.

b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $A(x)$, $0 \leq x \leq 20$.

c) La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área.

Solución:

En primer lugar se hace un esquema de la situación:



Y se relacionan las dos variables x e y:

Aplico el teorema de Pitágoras:

$$10^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2$$

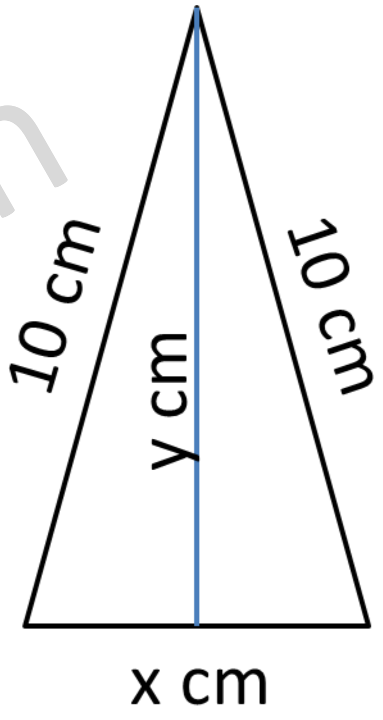
Despejo y:

$$y = \sqrt{10^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

Obteniendo la función



Una vez expresada la altura en función de x: $y = \sqrt{10^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}$

Ya podemos calcular el área del triángulo:

$$A = \frac{x \cdot y}{2} \longrightarrow A = \frac{x \cdot \sqrt{10^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2}}{2} = \frac{x \cdot \sqrt{100 - \frac{x^2}{4}}}{2} = \frac{\sqrt{100 \cdot x^2 - \frac{x^4}{4}}}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{\frac{400 \cdot x^2 - x^4}{4}}}{2} = \frac{\frac{\sqrt{400 \cdot x^2 - x^4}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{400 \cdot x^2 - x^4}}{4}$$

El área del triángulo en función del lado desigual es: $\boxed{A(x) = \frac{\sqrt{400 \cdot x^2 - x^4}}{4}}$

www.angelcuesta.com

Monotonía de la función

$$A(x) = \frac{\sqrt{400x^2 - x^4}}{4}$$

b) Los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función $A(x)$, $0 \le x \le 20$.

Para el estudio de la monotonía se debe derivar la función:

$$A'(x) = \frac{1}{4} \cdot \frac{800x - 4x^3}{2 \cdot \sqrt{400x^2 - x^4}} = \frac{200x - x^3}{2 \cdot \sqrt{400x^2 - x^4}}$$

Se iguala a cero la función derivada:

$$\frac{200x - x^3}{2 \cdot \sqrt{400x^2 - x^4}} = 0 \longrightarrow 200x - x^3 = 0 \longrightarrow x \cdot (200 - x^2) = 0$$

$$\boxed{x = 0}$$

$$200 - x^2 = 0 \longrightarrow x = \pm\sqrt{200}$$

$$\boxed{x = \sqrt{200}}$$

OJO DOMINIO

Se hace un estudio de signos de la derivada A'(x):

	0	$\sqrt{200}$	20
A(x)	$\nearrow$	$\searrow$	
A'(x)	$+$	$-$	

$A(x)$ *es creciente si* $x \in [0, \sqrt{200})$

$A(x)$ *es decreciente si* $x \in (\sqrt{200}, 20]$

El máximo relativo de f(x) está en x = $\sqrt{200}$.

También puedes escribir $10\sqrt{2}$

www.angelcuesta.com

©Angel Cuesta Arza

Cálculo de la longitud del lado que maximiza el área

c) La longitud x del tercer lado para que el área del triángulo sea máxima y el valor de esta área.

El máximo relativo de f(x) está en x = $\sqrt{200}$.

$$A(x) = \frac{\sqrt{400x^2 - x^4}}{4}$$

Se sustituye en la función A(x) para calcular el área.

$$A(\sqrt{200}) = \frac{\sqrt{400 \cdot (\sqrt{200})^2 - (\sqrt{200})^4}}{4} = \frac{\sqrt{400 \cdot 200 - 200^2}}{4} = 50$$

La longitud del tercer lado debe ser $\sqrt{200}$ cm y el área del triángulo es 50 cm^2.

www.angelcuesta.com