

# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2021



Problema 1

Discusión de un sistema de ecuaciones



# ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.



# OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este misma canal.



PAU Junio 2021



PAU Septiembre 2020



PAU Julio 2020



PAU Julio 2019



PAU Junio 2019

# Problema 1

Se da el sistema de ecuaciones: 
$$\begin{cases} 2x - y + z = \mathbf{m} \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + \mathbf{m}z = \mathbf{m} \end{cases}$$
, donde  $m$  es un parámetro real. Se pide:

- a) La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro  $m$ .
- b) La solución del sistema cuando  $m = 1$ .
- c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

**Solución:**

Para discutir el sistema de ecuaciones se utilizará el teorema de Rouché

Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & \mathbf{m} \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & \mathbf{m} \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & \mathbf{m} & \mathbf{m} \end{pmatrix}$$

Calculo del rango de  $A$  en función de  $\mathbf{m}$  utilizando su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & \mathbf{m} \end{vmatrix} = 3m; \quad 3m = 0 \longrightarrow m = 0$$

Si  $m \neq 0$  entonces  $|A| \neq 0$ ,  $\mathbf{Ran}(A) = 3 \longrightarrow \mathbf{Ran}(A^*) = 3$

Si  $m = 0$  entonces  $|A| = 0$ ,  $\mathbf{Ran}(A) < 3 \longrightarrow$  Debo calcular el rango de  $A$  y de  $A^*$  sustituyendo los valores de  $a$  en las matrices.

En esta ocasión, calcularé de forma simultánea el Rango de  $A$  y de  $A^*$  utilizando el método de Gauss para  $\mathbf{m}=0$ .

También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

# Problema 1

Si  $m = 0 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=2F_2-F_1 \\ F_3=2F_3-5F_1}]{F_2=2F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3+F_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A\* tiene dos filas linealmente independientes. Para  $m = 0$ , **Ran(A) = 2 y Ran(A\*) = 2.**

Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado a).

|               | Ran(A) | Ran(A*) | Nº incógnitas | Tipo de Sistema | Número de soluciones |
|---------------|--------|---------|---------------|-----------------|----------------------|
| Si $m \neq 0$ | 3      | 3       | 3             | S.C.D.          | Única                |
| Si $m = 0$    | 2      | 2       | 3             | S.C.I.          | Infinitas soluciones |

$$\begin{cases} 2x - y + z = m \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + mz = m \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & m \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & m & m \end{pmatrix}$$

# Problema 1

b) La solución del sistema cuando  $m = 1$ .

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + z = 1 \end{cases}$$

Como ya demostramos, el Sistema es Compatible determinado para  $m=1$ . Resolveré el sistema utilizando la regla de Cramer.

Recordamos que:  $|A| = 3m = 3$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} \color{red}{1} & -1 & 1 \\ \color{red}{0} & 1 & 3 \\ \color{red}{1} & -4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{9}{3} = \mathbf{3}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \color{red}{1} & 1 \\ 1 & \color{red}{0} & 3 \\ 5 & \color{red}{1} & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{9}{3} = \mathbf{3}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & \color{red}{1} \\ 1 & 1 & \color{red}{0} \\ 5 & -4 & \color{red}{1} \end{vmatrix}}{3} = \frac{-6}{3} = \mathbf{-2}$$

Solución:  $x=3$ ;  $y=3$ ;  $z=-2$

# Resolución del Sistema

c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

Sustituyo por  $m=0$  y obtengo el sistema a resolver. 
$$\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y = 0 \end{cases}$$

Aprovecho el desarrollo que he hecho en el apartado a) para obtener los rangos de  $A$  y  $A^*$ .

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ 3y + 5z = 0 \end{cases} \quad \text{Para resolver, asigno a } z \text{ el valor de un parámetro.}$$

$$z = \lambda; \lambda \in R \longrightarrow \begin{cases} 2x - y + \lambda = 0 \\ 3y + 5\lambda = 0 \end{cases} \xrightarrow{\quad} 2x - \left(-\frac{5\lambda}{3}\right) + \lambda = 0 \xrightarrow{\quad} 2x + \frac{5\lambda}{3} + \lambda = 0$$
$$\searrow y = -\frac{5\lambda}{3}$$

$$\xrightarrow{\quad} 6x + 5\lambda + 3\lambda = 0 \xrightarrow{\quad} x = -\frac{8\lambda}{6} = -\frac{4\lambda}{3}$$

$$\text{Solución: } x = -\frac{4\lambda}{3} \quad y = -\frac{5\lambda}{3} \quad z = \lambda; \lambda \in R$$

# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2021



Problema 2

Geometría

©Angel Cuesta Arza





# ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana  
Fotografía y vídeo.

©Angel Cuesta Arza



# OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Junio 2021  
Problema 2



PAU Junio 2021  
Problema 5



PAU Septiembre 2020  
Problema 2



PAU Septiembre 2020  
Problema 5



PAU Julio 2020  
Problema 2



PAU Julio 2020  
Problema 5



# Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Ecuaciones de planos y rectas.
- 2) Posición relativa de 2 rectas.
- 3) Posición relativa de recta y plano.
- 4) Volumen de un tetraedro.

Herramientas utilizadas:

- 1) Determinantes.
- 2) Vectores.



# Resolución del problema

Se dan las rectas:  $r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$ ,  $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$  y el plano  $\pi: x + my + z = 2$

- a) La posición relativa de las rectas  $r$  y  $s$ .
- b) El valor del parámetro  $m$  para que la recta  $r$  esté contenida en el plano  $\pi$ .
- c) Los puntos  $A, B, C$  intersección del plano  $\pi$  con los ejes de coordenadas cuando  $m = 2$ , así como el volumen del tetraedro de vértices  $A, B, C$  y  $P(2,2,2)$ .

## Solución:

Para determinar la posición relativa de las 2 rectas, calculo un punto y un vector director de cada una de ellas.

Lo más cómodo es expresar la ecuación de la recta "r" en forma paramétrica, de esta forma tendremos a disposición un punto y un vector director de forma sencilla. De la recta "s" se deducen directamente ambos.

### Recta r

Dado que la  $x$  es la única incógnita que se repite, podemos despejar las otras dos incógnitas en función de  $x$  y obtener la ecuación paramétrica.

$$r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} y = 1 - x \\ z = -1 + 2x \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

# Resolución del problema

Resumiendo:

$$\text{Recta } r: \begin{cases} P = (0,1,-1) \\ \vec{u} = (1,-1,2) \end{cases} \quad y \quad \text{Recta } s: \begin{cases} Q = (1,0,0) \\ \vec{v} = (1,-1,2) \end{cases}$$

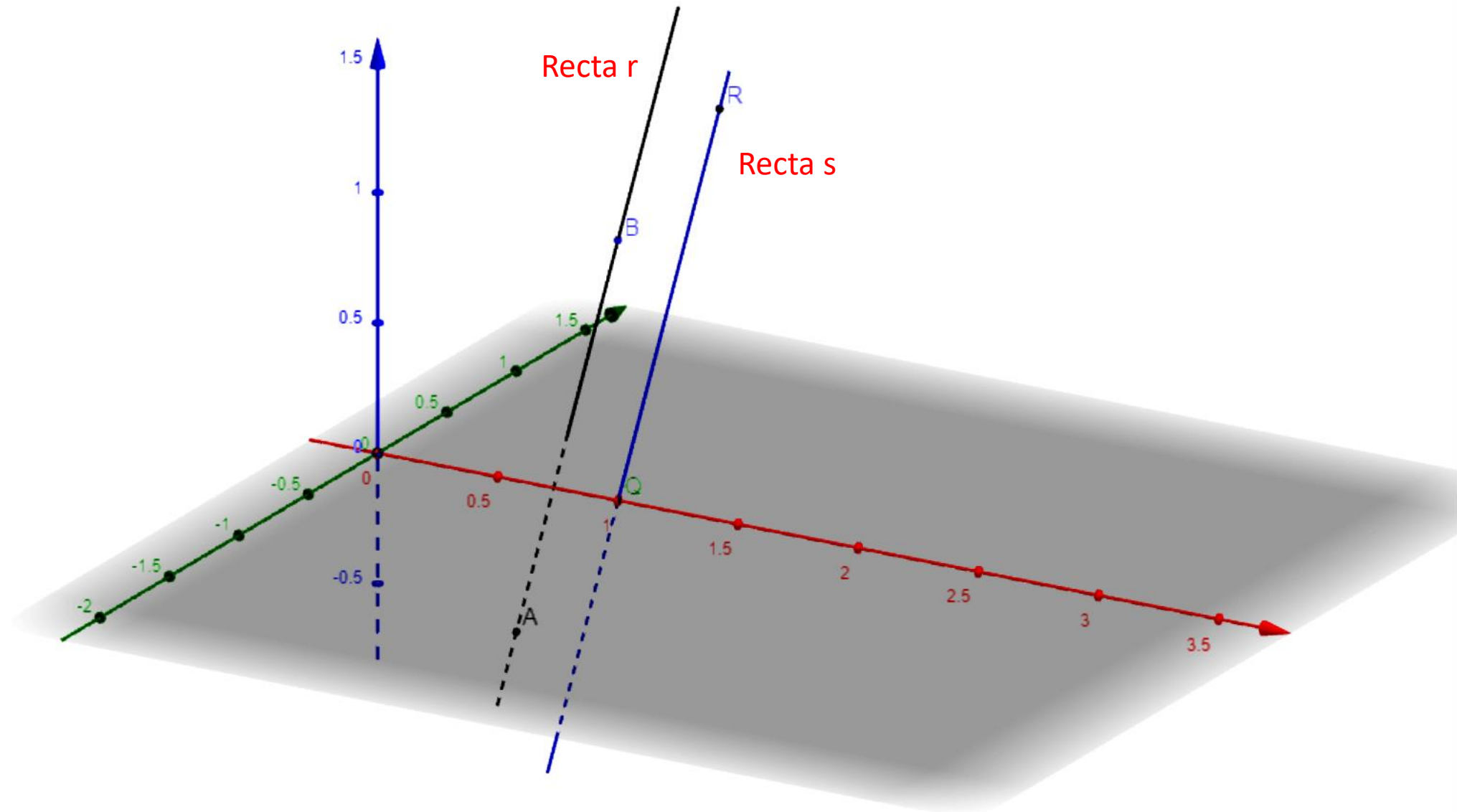
$$r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$
$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$$

Se observa que  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$  son iguales y por ello las rectas  $r$  y  $s$  **son paralelas o coincidentes**. Para saber cual de los dos casos es, se toma un punto de una de ellas y se verifica y pertenece a la otra. En este caso, comprobaré si el punto  $Q$  pertenece a la recta  $r$ . Se sustituye el punto  $Q$  en la ecuación de “ $r$ ”

$$\begin{cases} 1 = \lambda \\ 0 = 1 - \lambda \\ 0 = -1 + 2\lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda \\ 1 = \lambda \\ \frac{1}{2} = \lambda \end{cases}$$

Puesto que  $Q$  no pertenece a “ $r$ ”, podemos decir que las rectas no tienen ningún punto en común y son **paralelas**.

# Representación gráfica del apartado a)



# Resolución del problema

Se dan las rectas:  $r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$ ,  $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$  y el plano  $\pi: x + my + z = 2$

b) El valor del parámetro  $m$  para que la recta  $r$  esté contenida en el plano  $\pi$ .

Recordamos que “ $r$ ” expresada en forma paramétrica es:  $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$

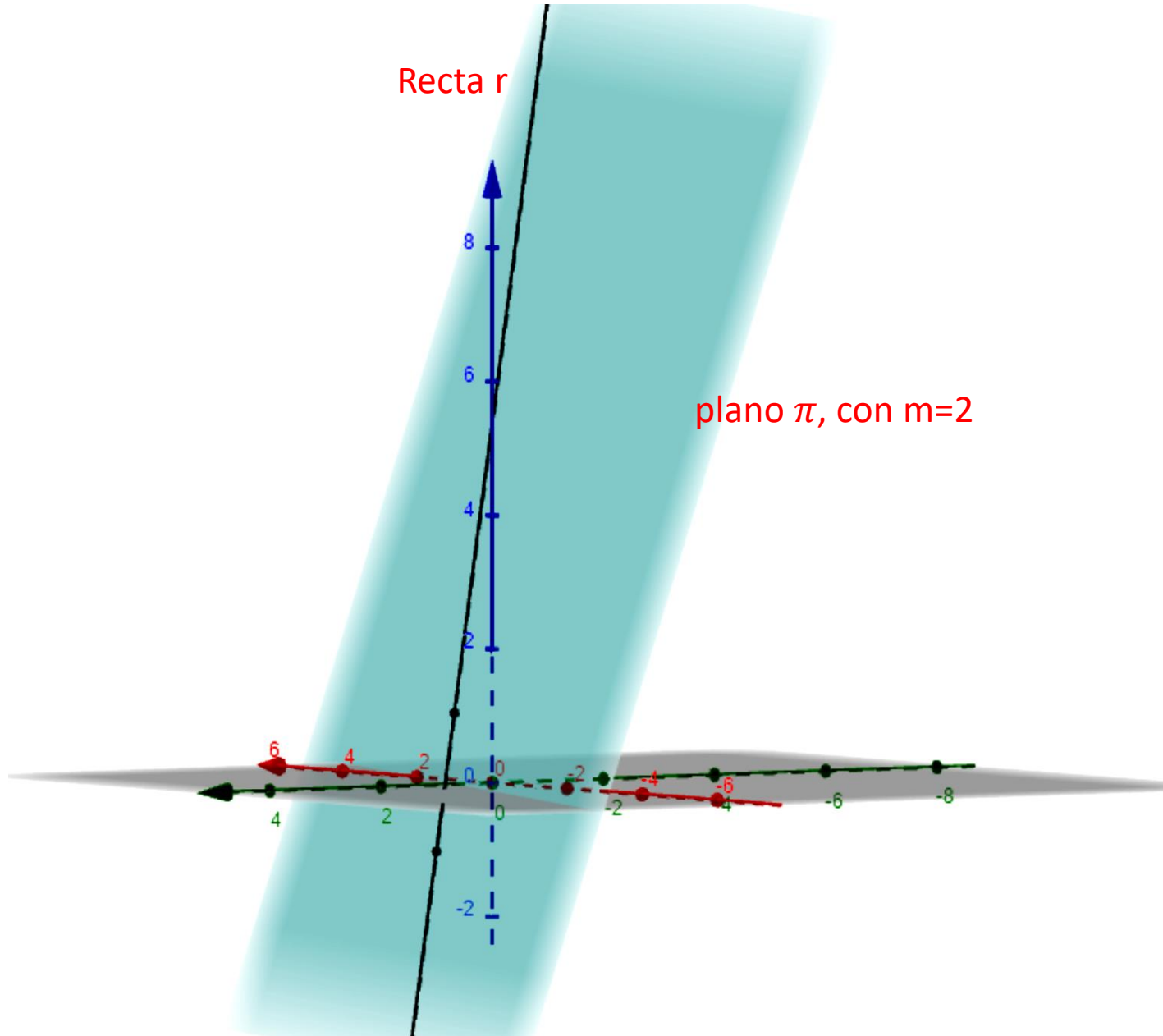
Sustituyo las ecuaciones paramétricas de la recta “ $r$ ” en el plano  $\pi$ . Para que la recta esté contenida en el plano, la ecuación definida deberá tener infinitas soluciones.

$$\lambda + m \cdot (1 - \lambda) - 1 + 2\lambda = 2 \longrightarrow \lambda + m - m \cdot \lambda - 1 + 2\lambda - 2 = 0 \longrightarrow (3 - m) \cdot \lambda + m - 3 = 0$$

Para que la ecuación tenga infinitas soluciones, es decir, que sea  $0=0$ , el valor de  $m$  debe ser 3.

El valor del parámetro  $m$  para que la recta  $r$  esté contenida en el plano  $\pi$  es  **$m=3$** .

# Representación gráfica del apartado b)





# Resolución del problema

Se dan las rectas:  $r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$ ,  $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$  y el plano  $\pi: x + my + z = 2$

c) Los puntos  $A, B, C$  intersección del plano  $\pi$  con los ejes de coordenadas cuando  $m = 2$ , así como el volumen del tetraedro de vértices  $A, B, C$  y  $P(2,2,2)$ .

Se sustituye  $m$  por 2 en el plano  $\pi: x + 2y + z = 2$

Las ecuaciones de los ejes de coordenadas son:  $Eje X: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ ;  $Eje Y: \begin{cases} x = 0 \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ ;  $Eje Z: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$

Sustituyendo cada ecuación en la ecuación del plano, obtendremos los puntos de intersección correspondientes.

$$\text{Eje X con } \pi: \lambda + 2 \cdot 0 + 0 = 2 \rightarrow \lambda = 2 \rightarrow \mathbf{A} = (2, 0, 0)$$

$$\text{Eje Y con } \pi: 0 + 2 \cdot \lambda + 0 = 2 \rightarrow \lambda = 1 \rightarrow \mathbf{B} = (0, 1, 0)$$

$$\text{Eje Z con } \pi: 0 + 2 \cdot 0 + \lambda = 2 \rightarrow \lambda = 2 \rightarrow \mathbf{C} = (0, 0, 2)$$

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (2, 2, 2) - (2, 0, 0) = (0, 2, 2)$$

Calculo los vectores  $\overrightarrow{AP}$ ,  $\overrightarrow{BP}$  y  $\overrightarrow{CP}$ :  $\overrightarrow{BP} = P - B = (2, 2, 2) - (0, 1, 0) = (2, 1, 2)$

$$\overrightarrow{CP} = P - C = (2, 2, 2) - (0, 0, 2) = (2, 2, 0)$$

# Resolución del problema

Para calcular el volumen del tetraedro, lo más fácil es aplicar la fórmula correspondiente, utilizando el producto mixto:

$$V_{tetraedro} = \frac{1}{6} \cdot [\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CP}]$$

$$\overrightarrow{AP} = (0, 2, 2)$$

$$\overrightarrow{BP} = (2, 1, 2)$$

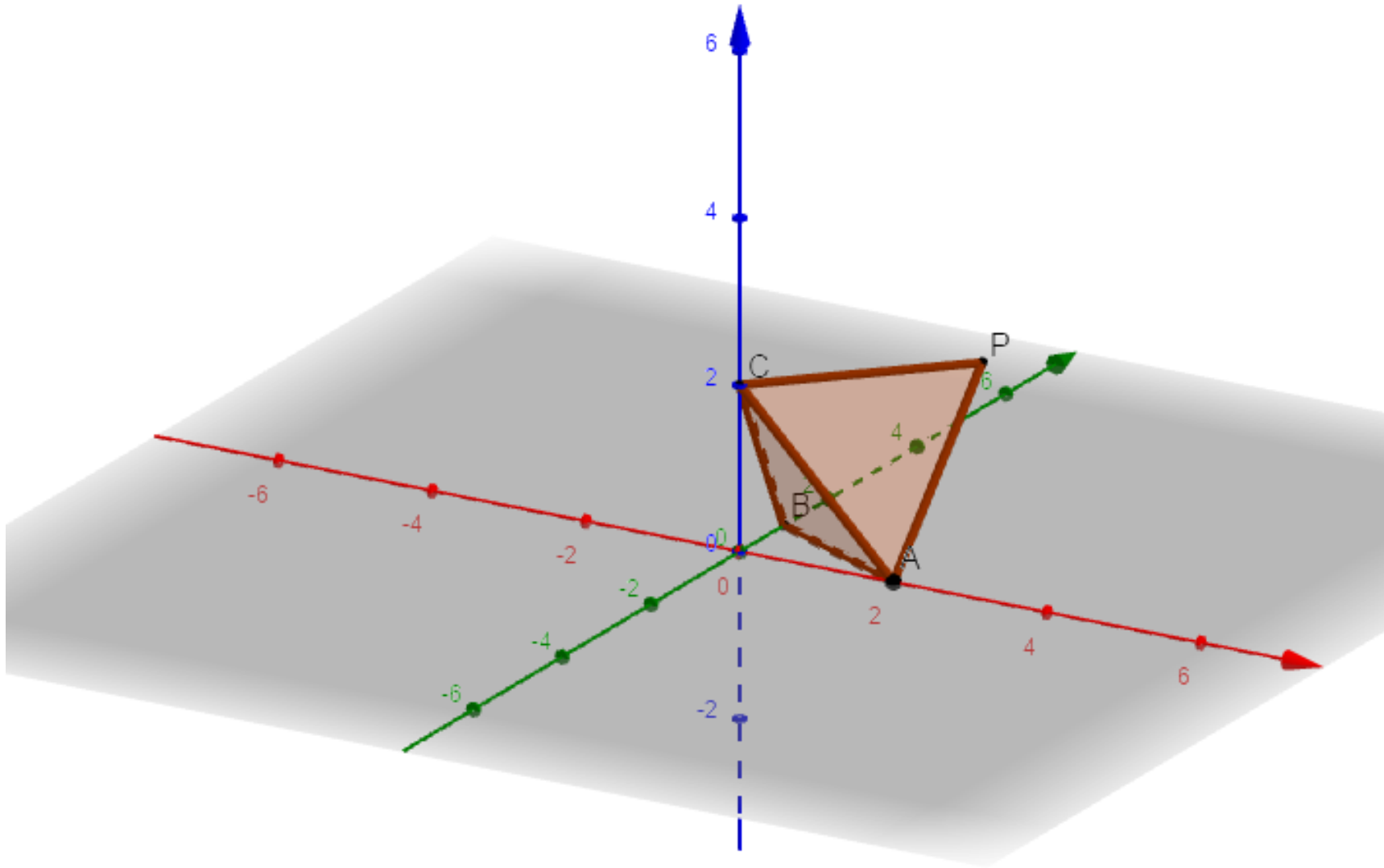
$$\overrightarrow{CP} = (2, 2, 0)$$

Calculo el producto mixto:

$$[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CP}] = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot [0 + 8 + 8 - (4 + 0 + 0)] = \frac{1}{6} \cdot 12 = 2$$

El volumen del tetraedro es de **2 unidades de volumen**.

# Representación gráfica del apartado c)



# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2021



Problema 3

Análisis de funciones e integrales



# ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana  
Fotografía y vídeo.

©Angel Cuesta Arza



# OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Junio 2021  
Problema 3



PAU Septiembre 2020  
Problema 3



PAU Julio 2020  
Problema 3



PAU Julio 2019  
Problema A3



PAU Junio 2019  
Problema A3



# Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Cálculo del dominio de una función.
- 2) Cálculo de las asíntotas de una función.
- 3) Cálculo de la primitiva de una función.

Herramientas:

- 1) Límites.
- 2) Derivadas.
- 3) Integrales.



# El Enunciado

## Estudio de la Monotonía

Dada la función  $f(x) = x \cdot e^{1-x^2}$ , calculad:

- a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.
- b) Las asíntotas y la gráfica de  $f$ .
- c) La integral  $\int f(x)dx$ .

**Solución:**

El dominio de esta función son todos los números reales.

$$\boxed{\text{Dom } f(x) = \mathbb{R}}$$

Y ahora estudiamos la monotonía de la función. Se calcula la derivada de  $f(x)$  y se iguala a cero.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{1-x^2} + x \cdot e^{1-x^2} \cdot (-2x) = e^{1-x^2} \cdot (1 - 2x^2)$$

$$e^{1-x^2} \cdot (1 - 2x^2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} e^{1-x^2} = 0 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \\ 1 - 2x^2 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

Se estudia el signo de la derivada, pero lo haré en la siguiente diapositiva.



# Estudio de la monotonía

$$f(x) = x \cdot e^{1-x^2}$$

$$f'(x) = e^{1-x^2} \cdot (1 - 2x^2)$$

Se estudia el signo de la derivada:

|         |           |                                                                                   |                                                                                    |                                                                                     |
|---------|-----------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|         | $-\infty$ | $-\sqrt{\frac{1}{2}}$                                                             | $\sqrt{\frac{1}{2}}$                                                               | $+\infty$                                                                           |
| $f'(x)$ |           | -                                                                                 | +                                                                                  | -                                                                                   |
| $f(x)$  |           |  |  |  |

$f(x)$  es **decreciente** en  $x \in \left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$  y **creciente** en  $x \in \left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

Los extremos relativos serán:

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{1-\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = -\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{e} = -\sqrt{\frac{e}{2}}$$

Mínimo relativo:  $\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, -\sqrt{\frac{e}{2}}\right) \approx (-0'707, -1'166)$

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{1-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{e} = \sqrt{\frac{e}{2}}$$

Máximo relativo:  $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{e}{2}}\right) \approx (0'707, 1'166)$

# Asíntotas

$$f(x) = x \cdot e^{1-x^2}$$

## b) Las asíntotas y la gráfica de $f$ .

Puesto que la función está definida en  $\mathbb{R}$ , no hay asíntotas verticales.

La **asíntota horizontal** se calcula con los límites en los infinitos.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{1-x^2} = \infty \cdot e^{1-\infty^2} = \infty \cdot e^{-\infty} = \infty \cdot 0 = \text{INDETERMINACIÓN}$$

Se expresa el límite como cociente para poder resolverlo aplicando el teorema de L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{x^2-1}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{INDETERMINACIÓN} \xrightarrow{\text{L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x \cdot e^{x^2-1}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

**$y = 0$  es A.H. de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a más infinito**

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{1-x^2} = -\infty \cdot e^{1-\infty^2} = -\infty \cdot e^{-\infty} = -\infty \cdot 0 = \text{INDETERMINACIÓN}$$

Se expresa el límite como cociente para poder resolverlo aplicando el teorema de L'Hopital

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{x^2-1}} = \frac{-\infty}{\infty} = \text{INDETERMINACIÓN} \xrightarrow{\text{L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2x \cdot e^{x^2-1}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

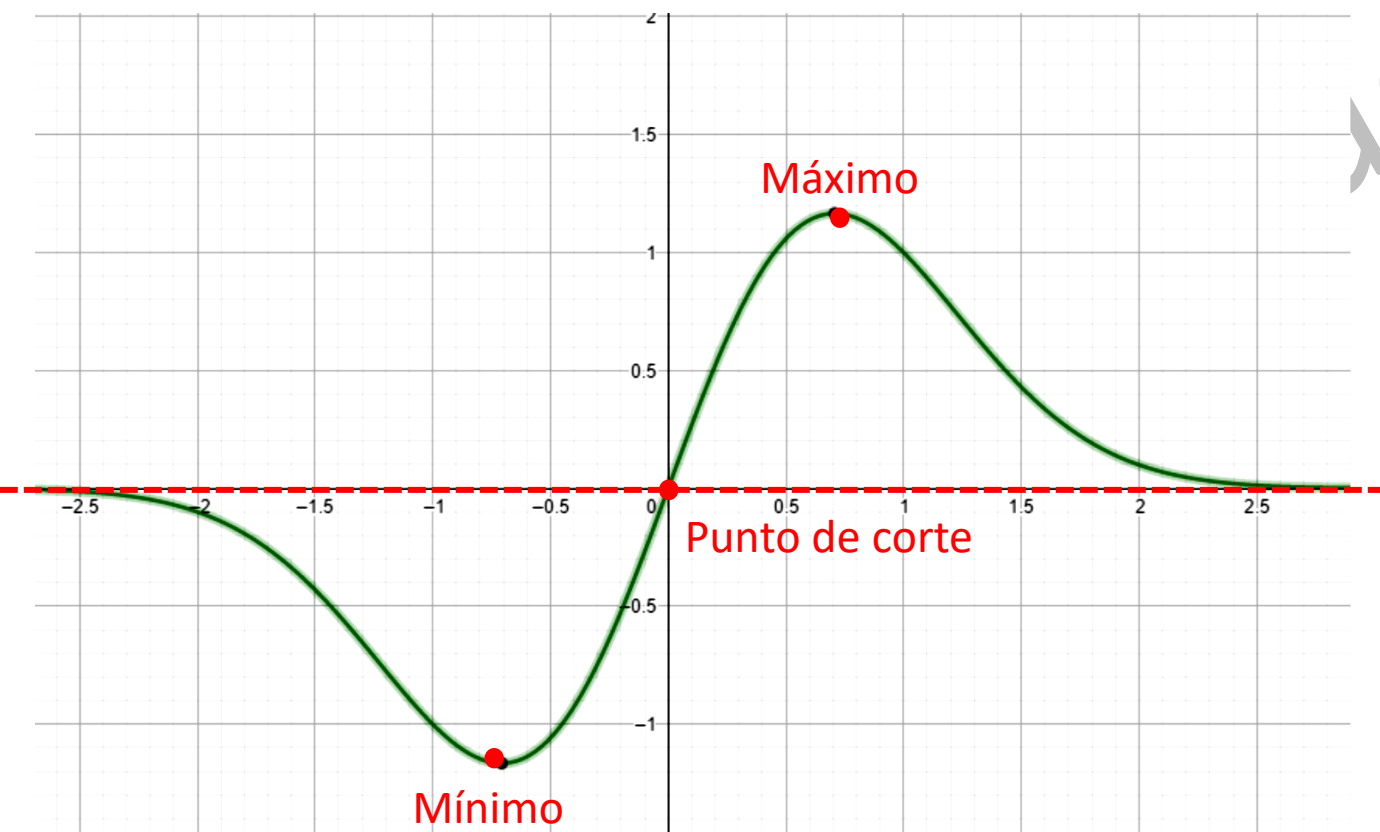
**$y = 0$  es A.H. de  $f(x)$  cuando  $x$  tiende a menos infinito**

# Gráfica

Aunque no nos piden los puntos de corte con los ejes, para hacer la gráfica necesito calcularlos.

Eje X ( $y=0$ ):  $x \cdot e^{1-x^2} = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{1-x^2} = 0 \rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} \end{cases} \longrightarrow$  El punto de corte con el eje X es **(0,0)**

Eje Y ( $x=0$ ):  $f(0) = 0 \cdot e^{1-0^2} = 0 \longrightarrow$  El punto de corte con el eje Y es **(0,0)**



Mínimo relativo:  $\approx (-0'707, -1'166)$

Máximo relativo:  $\approx (0'707, 1'166)$

Asíntota horizontal en  $y=0$

# Calculo de la integral

$$f(x) = x \cdot e^{1-x^2}$$

$$\int f(x) dx = \int x \cdot e^{1-x^2} dx = \int \frac{-2}{-2} \cdot x \cdot e^{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \int -2 \cdot x \cdot e^{1-x^2} dx = \boxed{-\frac{1}{2} \cdot e^{1-x^2} + C}$$

Estamos ante una integral semiinmediata. Ello es debido a que casi coincide con la fórmula de integración de las funciones exponenciales.

$$\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} + C$$

Debo multiplicar y dividir por  $-2$  para obtener una integral que se ajuste a la fórmula.

# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2021



Problema 4

Álgebra matricial



# ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.



# Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Rango de una matriz en función de un parámetro
- 2) Invertibilidad de una matriz.
- 3) Cálculo de la matriz inversa.

Herramientas utilizadas:

- 1) Matrices
- 2) Determinantes



# OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este misma canal.



PAU Junio 2021  
Problema 4



PAU Septiembre 2020  
Problema 4



PAU Julio 2020  
Problema 4



PAU Julio 2019  
Problema B1



PAU Junio 2019  
Problema A1





# Rango de una matriz

Se dan las matrices  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2 - 2 & 3 \end{pmatrix}$  y  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3)$ , se pide:

- a) El rango de la matriz  $A$  según los valores del parámetro  $a$ .
- b) Una matriz  $C$  tal que  $AC = 16 I$ , siendo  $I$  la matriz identidad, cuando  $a = 0$ .
- c) El rango de la matriz  $B$  y la discusión de si el sistema  $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  tiene solución.

**Solución:**

Utilizaré el método de los adjuntos para obtener el rango de la matriz.

Calculo el determinante de  $A$  y lo igualo a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2 - 2 & 3 \end{vmatrix} = -4a^2 + 16 = -4 \cdot (a - 2) \cdot (a + 2)$$

$$|A| = -4 \cdot (a - 2) \cdot (a + 2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} a - 2 = 0 \\ a + 2 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = -2 \end{cases}$$

# Rango de una matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2 - 2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) El rango de la matriz  $A$  según los valores del parámetro  $a$ .

Si  $a \neq 2$  y  $a \neq -2$ , entonces  $|A| \neq 0$ . Por ello, **Ran(A)=3**

Si  $a=2$  o  $a=-2$ , entonces  $|A|=0$ . Por ello, **Ran(A)<3**, debo comprobar en estos casos si el rango de la matriz es 1 o 2.

Si  $a=2$ , calculo un menor de orden 2.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4 \neq 0$  por ello podemos afirmar que en este caso, **Ran(A)=2**

Si  $a=-2$ , calculo un menor de orden 2.  $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 + 6 = 8 \neq 0$  por ello podemos afirmar que en este caso, **Ran(A)=2**

Resumiendo:

Si  $a \neq 2$  y  $a \neq -2$ , **Ran(A)=3**

Si  $a=2$  o  $a=-2$ , **Ran(A)=2**

b) Una matriz  $C$  tal que  $AC = 16I$ , siendo  $I$  la matriz identidad, cuando  $a=0$ .

Se despeja  $C$  de la ecuación matricial utilizando la matriz inversa de  $A$ .

$$A \cdot C = 16 \cdot I \longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot C = A^{-1} \cdot 16 \cdot I \longrightarrow I \cdot C = 16 \cdot A^{-1} \longrightarrow C = 16 \cdot A^{-1}$$

Para poder hallar  $C$ , debemos calcular la matriz inversa de  $A$ .

# Cálculo de la matriz inversa

Calcularé la matriz inversa mediante el algoritmo de los adjuntos:

1) Calculo  $|A|$ ;  $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 2 - 0 + 6 + 2 = 16 \neq 0$

Al ser el determinante distinto de cero, la matriz A **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos:  $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -12 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos:  $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula:  $(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t \longrightarrow (A)^{-1} = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Ya puedo calcular C:  $C = 16 \cdot A^{-1} = 16 \cdot \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

# Resolución de una ecuación matricial

c) El rango de la matriz  $B$  y la discusión de si el sistema  $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$  tiene solución.

Calculo el valor de la matriz  $B$   $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} (1 \quad 2 \quad 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Como se puede comprobar a simple vista, las 3 filas son proporcionales, por lo tanto **el rango de la matriz  $B$  es igual a 1.**

Para que dicho sistema tenga solución, el rango de la matriz ampliada definida por el sistema de ecuaciones debe ser igual a 1. Ya que, según el teorema de Rouché, si éste fuera 2 o 3, el sistema sería incompatible y no tendría solución.

La matriz ampliada es:  $B^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

Como se puede comprobar a simple vista, las 3 filas son proporcionales, por lo tanto **el rango de la matriz  $B^*$  es igual a 1.**

Por ello y tal como hemos dicho antes, según el teorema de Rouché el sistema sería compatible indeterminado y **tendría infinitas soluciones.**

# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II  
Julio 2021



Problema 5  
Geometría



# ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana  
Fotografía y vídeo.

©Angel Cuesta Arza



# Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Ecuaciones de planos y rectas.
- 2) Distancia entre dos rectas paralelas.
- 3) 3 puntos alineados.

Herramientas utilizadas.

- 1) Determinantes
- 2) Vectores.



# OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Junio 2021  
Problema 2



PAU Junio 2021  
Problema 5



PAU Septiembre 2020  
Problema 2



PAU Septiembre 2020  
Problema 5



PAU Julio 2020  
Problema 2



PAU Julio 2020  
Problema 5





# Resolución del problema

Dados los puntos  $P = (1,1,0)$ ,  $Q = (2,-1,1)$  y  $R = (\alpha, 3, -1)$  se pide:

- La ecuación del plano que contiene a  $P$ ,  $Q$  y  $R$  cuando  $\alpha = 1$  y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas.
- La ecuación de la recta  $r$  que pasa por  $R$  cuando  $\alpha = 1$  y es paralela a la recta  $s$  que pasa por  $P$  y  $Q$ . Calculad la distancia entre las rectas  $r$  y  $s$ .
- Los valores de  $\alpha$  para los cuales  $P$ ,  $Q$  y  $R$  están alineados y la ecuación de la recta que los contiene.

## Solución:

Dados los puntos  $P = (1,1,0)$ ,  $Q = (2,-1,1)$  y  $R = (1,3,-1)$  se calcula la ecuación general del plano:

Calculo el vector director del plano que pasa por  $P$  y  $Q$ :  $\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (2,-1,1) - (1,1,0) = (1,-2,1)$

Calculo el vector director del plano que pasa por  $P$  y  $R$ :  $\vec{w} = \overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP} = (1,3,-1) - (1,1,0) = (0,2,-1)$

Con los dos vectores directores del plano y un punto ( $P$ ,  $Q$  o  $R$ ), ya puedo calcular la ecuación implícita del plano.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow (x-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (y-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + z \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-1) \cdot 0 - (y-1) \cdot (-1) + z \cdot 2 = 0 \longrightarrow y-1+2z=0 \longrightarrow y+2z-1=0$$

La ecuación del plano será:  $\pi: y+2z-1=0$

# Resolución del problema

a) La ecuación del plano que contiene a  $P$ ,  $Q$  y  $R$  cuando  $\alpha = 1$  y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas.

Para determinar la distancia de un punto a un plano, lo más rápido es aplicar la fórmula correspondiente.

$$d_{P\pi} = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}} \text{ unidades de longitud}}$$

b) La ecuación de la recta  $r$  que pasa por  $R$  cuando  $\alpha = 1$  y es paralela a la recta  $s$  que pasa por  $P$  y  $Q$ . Calculad la distancia entre las rectas  $r$  y  $s$ .

$$P = (1, 1, 0), Q = (2, -1, 1) \text{ y } R = (1, 3, -1)$$

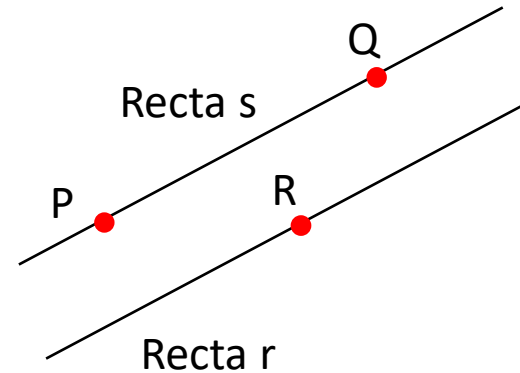
Calculo el vector director de la recta  $s$ , que será el mismo que el de la recta  $r$ , puesto que son paralelas:

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (2, -1, 1) - (1, 1, 0) = (1, -2, 1)$$

A partir de los datos, obtengo las ecuaciones paramétricas de ambas rectas.

$$s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 - 2\mu \\ z = -1 + \mu \end{cases}, \mu \in \mathbb{R}$$



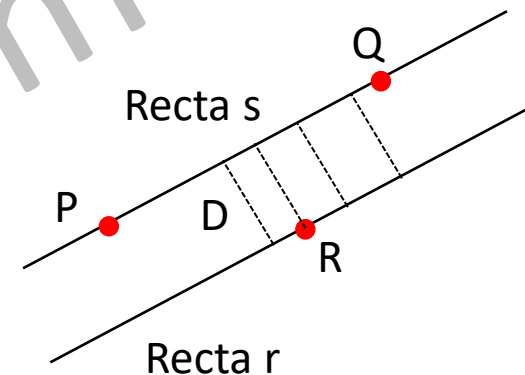
# Resolución del problema

b) La ecuación de la recta  $r$  que pasa por  $R$  cuando  $\alpha = 1$  y es paralela a la recta  $s$  que pasa por  $P$  y  $Q$ . **Calculad la distancia entre las rectas  $r$  y  $s$ .**

Puesto que las rectas son paralelas, basta con calcular la distancia de un punto de una de ellas a la otra recta. Por ejemplo la distancia del punto  $R$  a la recta  $s$ .

La forma más rápida de calcular la distancia de un punto a una recta es utilizar la fórmula correspondiente.

$$D_{Rs} = \frac{|\overrightarrow{RP} \times \vec{v}|}{|\vec{v}|}$$



Calculo el vector que va desde  $R$  hasta  $P$ .  $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR} = (1, 1, 0) - (1, 3, -1) = (0, -2, 1)$

Calculo el producto vectorial.  $\overrightarrow{RP} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{j} - (-2\vec{k} - 2\vec{i}) = \vec{j} + 2\vec{k}$

Calculo  $|\overrightarrow{RP} \times \vec{v}|$ :  $|\overrightarrow{RP} \times \vec{v}| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$       Calculo  $|\vec{v}|$ :  $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

Ya podemos terminar el cálculo:  $d_{Rs} = \frac{|(0, -2, 1) \times (1, -2, 1)|}{|(2, 1, -1)|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{30}}{6}$

La distancia entre las rectas  $r$  y  $s$  es  $\sqrt{30}/6$  unidades de longitud.

# Resolución del problema

Dados los puntos  $P = (1,1,0)$ ,  $Q = (2,-1,1)$  y  $R = (\alpha, 3, -1)$  se pide:

c) Los valores de  $\alpha$  para los cuales  $P$ ,  $Q$  y  $R$  están alineados y la ecuación de la recta que los contiene.

3 puntos están alineados si los vectores que los unen son paralelos.

Calculo los vectores  $\overrightarrow{PQ}$  y  $\overrightarrow{QR}$

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (2, -1, 1) - (1, 1, 0) = (1, -2, 1)$$

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OQ} = (\alpha, 3, -1) - (2, -1, 1) = (\alpha - 2, 4, -2)$$

Dos vectores son paralelos si sus componentes son proporcionales.

$$\frac{1}{\alpha - 2} = \frac{-2}{4} = \frac{1}{-2} \longrightarrow \frac{1}{\alpha - 2} = \frac{1}{-2} \longrightarrow \alpha = 0$$

El valor de  $\alpha$  para que los puntos estén alineados es **0**.

A partir de un punto (P) y del vector director  $\overrightarrow{PQ}$  obtengo la ecuación de la recta. Nos damos cuenta de que es la misma recta que ya habíamos calculado anteriormente.

$$s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

# Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2021



Problema 6

Problema de optimización



# ADVERTENCIA



- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana  
Fotografía y vídeo.

©Angel Cuesta Arza



# Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

- 1) Optimización de funciones.
- 2) Estudio de la monotonía y criterio de la segunda derivada.

Herramientas utilizadas:

- 1) Funciones.
- 2) Derivadas.



# OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Junio 2021  
Problema 6



PAU Septiembre 2020  
Problema 6



PAU Julio 2020  
Problema 6



PAU Julio 2019  
Problema B3



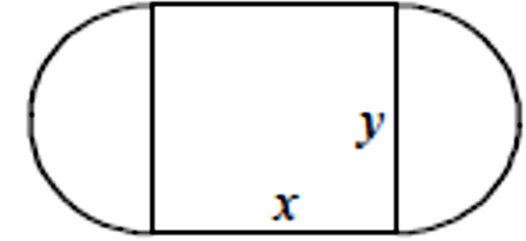
PAU Junio 2019  
Problema B3





# Obteniendo la función

Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia fuera. La superficie del campo mide  $(4 + \pi)$  metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal y como se observa en la figura. Se pide:



a) Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo.

b) Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima.

**Solución:**

El área del campo es:  $A = A_{\text{rectángulo}} + A_{\text{círculo}} = x \cdot y + \pi \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^2$

Debemos tener en cuenta que el radio de la parte circular del campo es  $y/2$ .

Igualamos el área del enunciado a la expresión obtenida:  $x \cdot y + \pi \cdot \frac{y^2}{4} = 4 + \pi \longrightarrow 4 \cdot x \cdot y + \pi \cdot y^2 = 16 + 4\pi$

Despejamos x:  $4 \cdot x \cdot y = 16 + 4\pi - \pi \cdot y^2 \longrightarrow x = \frac{16 + 4\pi - \pi \cdot y^2}{4 \cdot y}$

La longitud total de las rayas del campo es:  $L = L_{\text{rectángulo}} + L_{\text{círcunferencia}} = 2x + 2y + 2\pi \cdot \frac{y}{2} = 2x + 2y + \pi \cdot y$

Se sustituye el valor de x:  $L = 2 \left( \frac{16 + 4\pi - \pi \cdot y^2}{4 \cdot y} \right) + 2y + \pi y = \frac{8 + 2\pi}{y} - \frac{\pi}{2} \cdot y + 2y + \pi y = \boxed{\frac{8 + 2\pi}{y} + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) \cdot y}$

# Obteniendo la función

Una vez obtenida la función, debemos calcular su dominio de definición para terminar el ejercicio correctamente.

Recordamos que:  $x = \frac{16 + 4\pi - \pi \cdot y^2}{4 \cdot y}$

Puesto que x debe ser positiva:  $\frac{16 + 4\pi - \pi \cdot y^2}{4 \cdot y} > 0 \longrightarrow 16 + 4\pi - \pi \cdot y^2 > 0 \longrightarrow 16 + 4\pi > \pi \cdot y^2$

$$y^2 < \frac{16 + 4\pi}{\pi}$$

Puesto que el término de la derecha de la inecuación es positivo, puedo afirmar que y mayor que 1:  $y < \sqrt{\frac{16 + 4\pi}{\pi}}$

Mucho cuidado con este último despeje. Sólo es válido con las condiciones indicadas.

Una vez acotada superiormente la variable y, y teniendo en cuenta que y debe ser mayor que cero, podemos dar el dominio de la función y la solución completa.

La longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo es:

$$L = \frac{8 + 2\pi}{y} + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) \cdot y, y \in \left(0, \sqrt{\frac{16 + 4\pi}{\pi}}\right)$$

# Optimizando la función

b) Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima.

Una vez obtenida la función, debemos calcular el mínimo de dicha función en su dominio de definición. Para ello, en primer lugar se hará la derivada y se igualará a cero.

$$L = \frac{8 + 2\pi}{y} + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) \cdot y \quad , y \in \left(0, \sqrt{\frac{16 + 4\pi}{\pi}}\right) \longrightarrow L' = \frac{-(8 + 2\pi)}{y^2} + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)$$
$$\frac{-(8 + 2\pi)}{y^2} + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) = 0 \longrightarrow \frac{(8 + 2\pi)}{y^2} = \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) \longrightarrow y^2 = \frac{8 + 2\pi}{\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)} \longrightarrow y = \sqrt{\frac{8 + 2\pi}{\left(\frac{\pi}{2} + 2\right)}} = 2$$

Podemos comprobar que  $y=2$  pertenece al dominio de la función, ya que:  $\sqrt{\frac{16 + 4\pi}{\pi}} \approx 3'015$

Para demostrar que  $y=2$  es un mínimo de la función, utilizaré el **criterio de la segunda derivada** (con fines pedagógicos). Haré el estudio de signo de la derivada al final del vídeo para que podáis comparar ambos métodos.

# Optimizando la función

El **criterio de la segunda derivada** nos dice que para que un valor de  $y$  sea mínimo,  $f''(y_0) > 0$ , donde  $y_0$  es el valor que anula la primera derivada.

Calculo la segunda derivada:

$$L' = \frac{-(8 + 2\pi)}{y^2} + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) \longrightarrow L'' = \frac{2 \cdot (8 + 2\pi)}{y^3}$$

Sustituyo  $y=2$  en la segunda derivada y compruebo si es mayor que cero.  $L'' = \frac{2 \cdot (8 + 2\pi)}{2^3} > 0$

Podemos afirmar que cuando  $y=2$ , el valor de la función longitud es mínimo.

Calculo el valor de  $x$ : 
$$x = \frac{16 + 4\pi - \pi \cdot y^2}{4 \cdot y} = \frac{16 + 4\pi - \pi \cdot 2^2}{4 \cdot 2} = 2$$

Para que la longitud de las líneas a pintar sea mínima, las dimensiones de **la parte rectangular deben ser de 2 por 2 metros. Los semicírculos tendrán un diámetro de 2 metros, y una longitud de  $\pi$  metros cada uno.**

# Optimizando la función

Se hace un estudio de signos de la derivada  $L'(x)$ :  $L' = \frac{-(8 + 2\pi)}{y^2} + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)$

|       |                                                                                   |   |                                              |   |   |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------|---|----------------------------------------------|---|---|
|       | 0                                                                                 | 2 | $\sqrt{\frac{16 + 4\pi}{\pi}} \approx 3'015$ |   |   |
| L(y)  |  |   |                                              |   |   |
| L'(y) | <table data-bbox="262 676 942 779"> <tr> <td>—</td> <td>+</td> </tr> </table>     |   |                                              | — | + |
| —     | +                                                                                 |   |                                              |   |   |

$L(y)$  es decreciente si  $x \in (0, 2)$

$L(y)$  es decreciente si  $x \in (2, \sqrt{\frac{16 + 4\pi}{\pi}}]$

El mínimo relativo de  $L(y)$  está en  $y = 2$

El resto del ejercicio se hace tal como he hecho antes.

Calculo el valor de  $x$ :  $x = \frac{16 + 4\pi - \pi \cdot y^2}{4 \cdot y} = \frac{16 + 4\pi - \pi \cdot 2^2}{4 \cdot 2} = 2$

Para que la longitud de las líneas a pintar sea mínima, las dimensiones de la parte rectangular deben ser de 2 por 2 metros. Los semicírculos tendrán un diámetro de 2 metros, y una longitud de  $\pi$  metros cada uno.