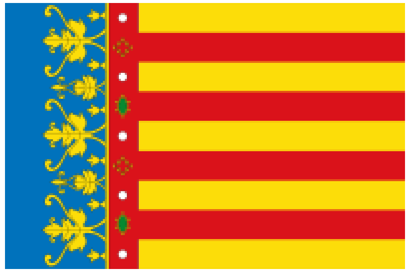
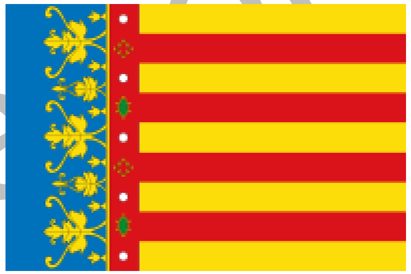
Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2021



Problema 1

Discusión de un sistema de ecuaciones

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este misma canal.

PAU Junio 2021

PAU Septiembre 2020

PAU Julio 2020

PAU Julio 2019

PAU Junio 2019

Problema 1

Se da el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x - y + z = \mathbf{m} \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + \boldsymbol{m}z = \mathbf{m} \end{cases}$, donde m es un parámetro real. Se pide:

a) La discusión del sistema de ecuaciones en función del parámetro m.

b) La solución del sistema cuando m = 1.

c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

Solución:

Para discutir el sistema de ecuaciones se utilizará el teorema de Rouché

Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & \boldsymbol{m} \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & \boldsymbol{m} \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & \boldsymbol{m} & \boldsymbol{m} \end{pmatrix}$$

Calculo del rango de A en función de $\boldsymbol{m}$ utilizando su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & m \end{vmatrix} = 3m;\ 3m = 0 \longrightarrow m = 0$$

Si $m \neq 0$ entonces $|A| \neq 0$, **Ran**$(\boldsymbol{A}) = \mathbf{3} \longrightarrow$ **Ran**$(\boldsymbol{A}^*) = \mathbf{3}$

Si $m = 0$ entonces $|A| = 0$, **Ran**$(\boldsymbol{A}) < \mathbf{3} \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A* sustituyendo los valores de a en las matrices.

En esta ocasión, calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A* utilizando el método de Gauss para **m=0**. También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

Problema 1

$$\begin{cases} 2x - y + z = \mathbf{m} \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + \boldsymbol{m}z = \boldsymbol{m} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 5 & -4 & \boldsymbol{m} \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & \boldsymbol{m} \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & \boldsymbol{m} & \boldsymbol{m} \end{pmatrix}$$

Si $m = 0$ $\longrightarrow$ $A^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

A

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & \mathbf{0} \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_3=2F_3-5F_1]{F_2=2F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & -3 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3+F_2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A* tiene dos filas linealmente independientes. Para $m = 0$, **Ran**$(\boldsymbol{A}) = \mathbf{2}$ $\boldsymbol{y}$ **Ran**$(\boldsymbol{A}^*) = \mathbf{2}$.

Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado a).

	Ran(A)	**Ran(A*)**	**Nº incógnitas**	**Tipo de Sistema**	**Número de soluciones**
Si m $\neq$ 0	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $\boldsymbol{m} = \mathbf{0}$	2	2	3	S.C.I.	Infinitas soluciones

Problema 1

b) La solución del sistema cuando m = 1.

$$\begin{cases} 2x - y + z = 1 \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y + z = 1 \end{cases}$$

Como ya demostramos, el Sistema es Compatible determinado para m=1. Resolveré el sistema utilizando la regla de Cramer.

Recordamos que: $|A| = 3m = 3$

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{9}{3} = \mathbf{3} \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{9}{3} = \mathbf{3} \qquad z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 5 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{3} = \frac{-6}{3} = \mathbf{-2}$$

Solución: x=3; y=3; z=−2

Resolución del Sistema

c) Las soluciones del sistema en el caso en que sea compatible indeterminado.

Sustituyo por m=0 y obtengo el sistema a resolver. $\begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y + 3z = 0 \\ 5x - 4y \quad\;\; = 0 \end{cases}$

Aprovecho el desarrollo que he hecho en el apartado a) para obtener los rangos de A y A*.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ \quad 3y + 5z = 0 \end{cases}$$

Para resolver, asigno a z el valor de un parámetro.

$$z = \lambda;\ \ \lambda \in R \longrightarrow \begin{cases} 2x - y + \lambda = 0 \\ \quad 3y + 5\lambda = 0 \end{cases} \longrightarrow y = -\frac{\mathbf{5\lambda}}{\mathbf{3}}$$

$$2x - \left(-\frac{5\lambda}{3}\right) + \lambda = 0 \longrightarrow 2x + \frac{5\lambda}{3} + \lambda = 0$$

$$\longrightarrow 6x + 5\lambda + 3\lambda = 0 \longrightarrow x = -\frac{8\lambda}{6} = -\frac{\mathbf{4\lambda}}{\mathbf{3}}$$

$$\boxed{\text{Solución: } x = -\frac{4\lambda}{3} \quad y = -\frac{\mathbf{5\lambda}}{\mathbf{3}} \quad z = \lambda;\ \ \lambda \in R}$$