Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II

Julio 2021

Problema 2

Geometría

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

PAU Junio 2021
Problema 2

PAU Junio 2021
Problema 5

PAU Septiembre 2020
Problema 2

PAU Septiembre 2020
Problema 5

PAU Julio 2020
Problema 2

PAU Julio 2020
Problema 5

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Ecuaciones de planos y rectas.
2) Posición relativa de 2 rectas.
3) Posición relativa de recta y plano.
4) Volumen de un tetraedro.

Herramientas utilizadas:

1) Determinantes.
2) Vectores.

Resolución del problema
El enunciado

Se dan las rectas: $r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$, $s: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{2}$ y el plano π $\pi: x + my + z = 2$

a) La posición relativa de las rectas r y s.

b) El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π.

c) Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando m = 2, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P(2,2,2).

Solución:

Para determinar la posición relativa de las 2 rectas, calculo un punto y un vector director de cada una de ellas.

Lo más cómodo es expresar la ecuación de la recta “r” en forma paramétrica, de esta forma tendremos a disposición un punto y un vector director de forma sencilla. De la recta “s” se deducen directamente ambos.

Recta r

Dado que la x es la única incógnita que se repite, podemos despejar las otras dos incógnitas en función de x y obtener la ecuación paramétrica.

$$r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} y = 1 - x \\ z = -1 + 2x \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \epsilon R$$

Resolución del problema

$$r:\begin{cases} x = \lambda \\ y = 1-\lambda \quad \lambda \epsilon R \\ z = -1+2\lambda \end{cases}$$

$$s: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{2}$$

Resumiendo:

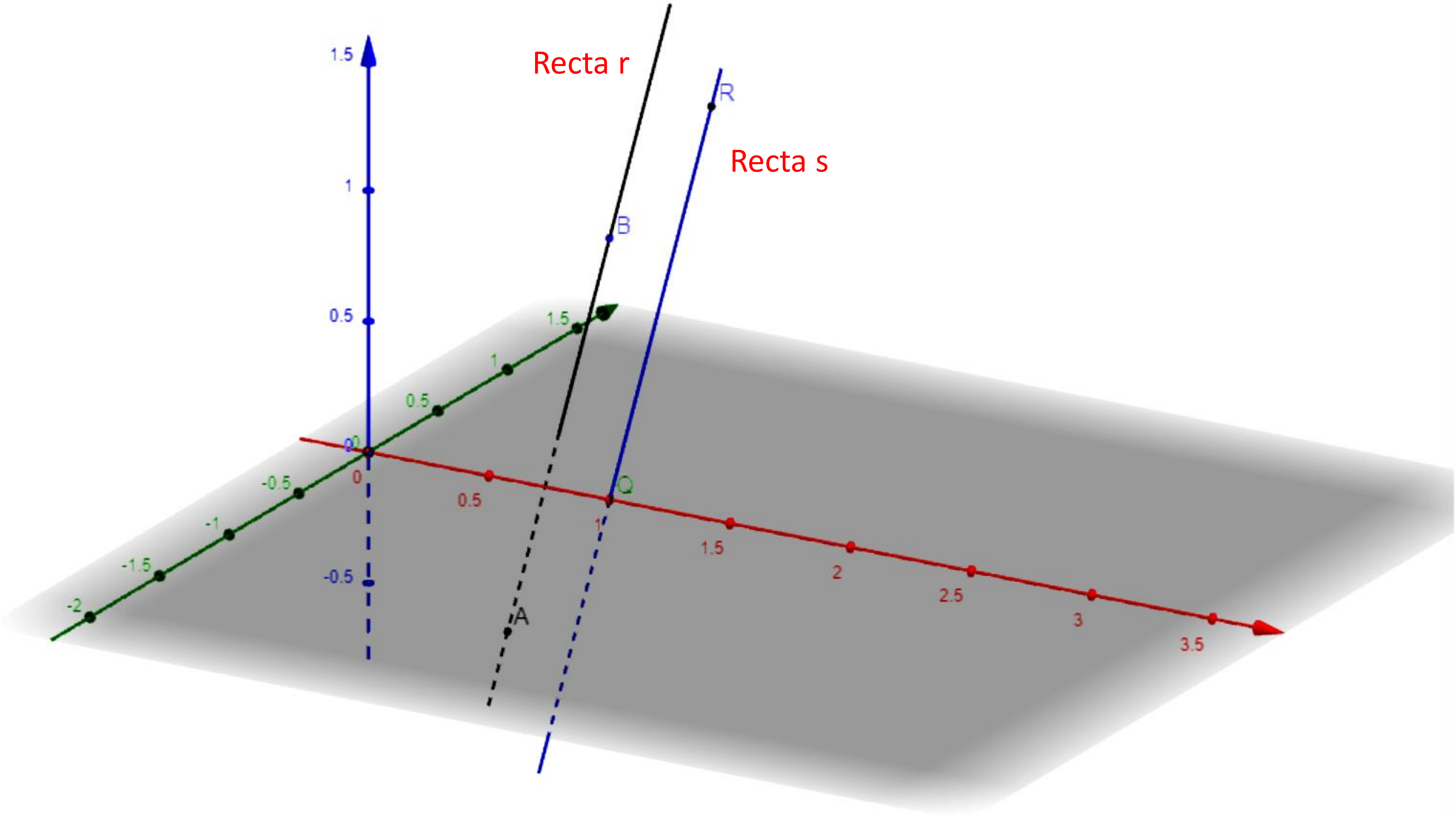
$$Recta\ r: \begin{cases} P = (0,1,-1) \\ \vec{u} = (1,-1,2) \end{cases} \quad y \quad Recta\ s: \begin{cases} Q = (1,0,0) \\ \vec{v} = (1,-1,2) \end{cases}$$

Se observa que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son iguales y por ello las rectas r y s **son paralelas** o **coincidentes.** Para saber cual de los dos casos es, se toma un punto de una de ellas y se verifica y pertenece a la otra. En este caso, comprobaré si el punto Q pertenece a la recta r. Se sustituye el punto Q en la ecuación de "r"

$$\begin{cases} 1 = \lambda \\ 0 = 1-\lambda \\ 0 = -1+2\lambda \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 1 = \lambda \\ 1 = \lambda \\ \dfrac{1}{2} = \lambda \end{cases}$$

Puesto que Q no pertenece a "r", podemos decir que las rectas no tienen ningún punto en común y son **paralelas.**

Representación gráfica del apartado a)



Resolución del problema

Se dan las rectas: $r: \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - z - 1 = 0 \end{cases}$, $s: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{2}$ y el plano π $\pi: x + my + z = 2$

b) El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π.

Recordamos que "r" expresada en forma paramétrica es: $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - \lambda \quad \lambda \epsilon R \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases}$

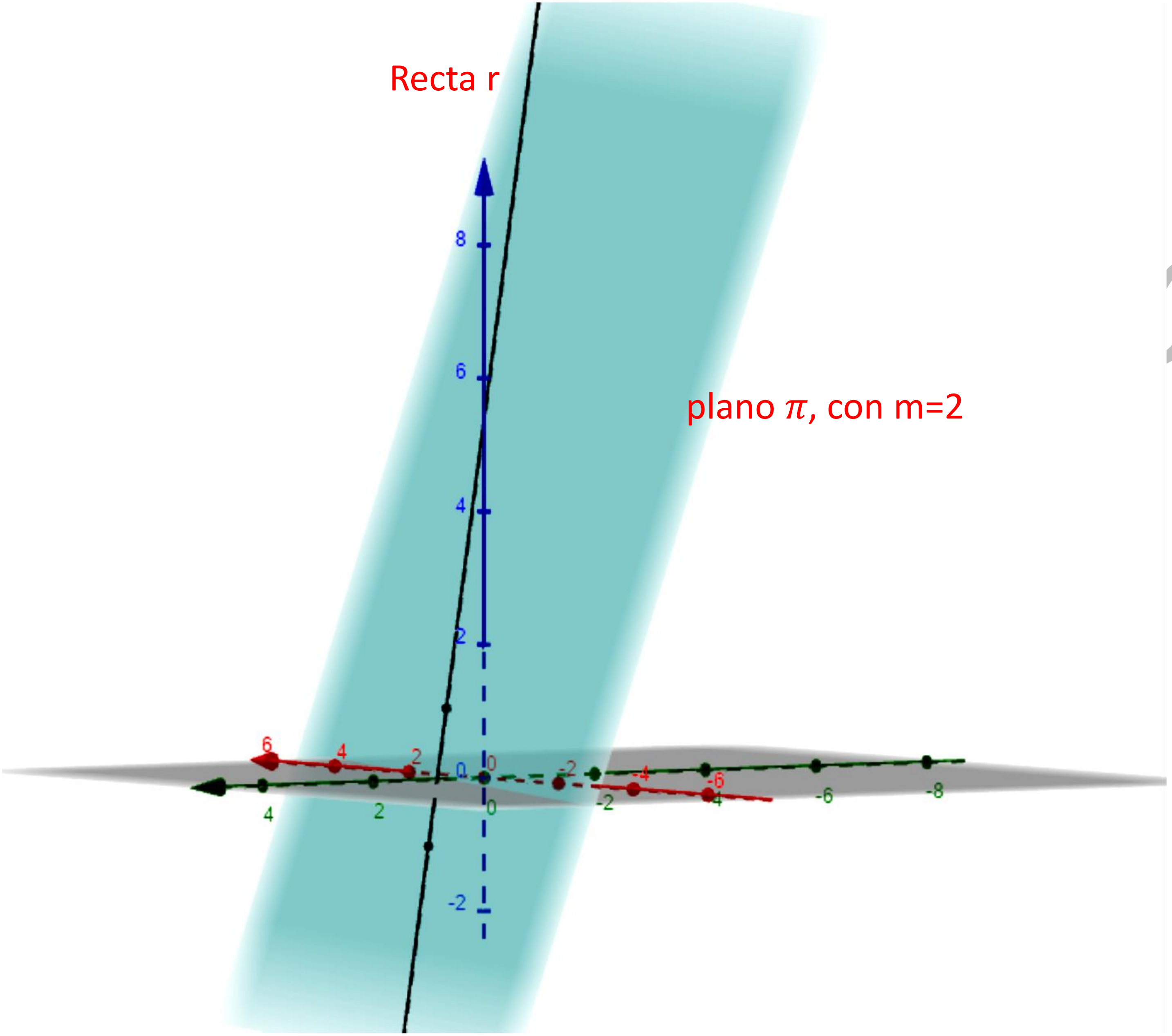
Sustituyo las ecuaciones paramétricas de la recta "r" en el plano π. Para que la recta esté contenida en el plano, la ecuación definida deberá tener infinitas soluciones.

$$\lambda + m \cdot (1 - \lambda) - 1 + 2\lambda = 2 \longrightarrow \lambda + m - m \cdot \lambda - 1 + 2\lambda - 2 = 0 \longrightarrow (3 - m) \cdot \lambda + m - 3 = 0$$

Para que la ecuación tenga infinitas soluciones, es decir, que sea 0=0, el valor de m debe ser 3.

El valor del parámetro m para que la recta r esté contenida en el plano π es **m=3.**

Representación gráfica del apartado b)



Resolución del problema

Se dan las rectas: $r: \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x-z-1=0 \end{cases}$, $s: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{2}$ y el plano π $\pi: x+my+z=2$

c) Los puntos A, B, C intersección del plano π con los ejes de coordenadas cuando m = 2, así como el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y P(2,2,2).

Se sustituye m por 2 en el plano π $\pi: x+2y+z=2$

Las ecuaciones de los ejes de coordenadas son: $\textbf{Eje } \boldsymbol{X}: \begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$; $\textbf{Eje } \boldsymbol{Y}: \begin{cases} x=0 \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$; $\textbf{Eje } \boldsymbol{Z}: \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{cases}$

Sustituyendo cada ecuación en la ecuación del plano, obtendremos los puntos de intersección correspondientes.

Eje X con π: λ+2·0+0=2 → λ=2 → **A=(2,0,0)**

Eje Y con π: 0+2· λ+0=2 → λ=1 → **B=(0,1,0)**

Eje Z con π: 0+2· 0+ λ=2 → λ=2 → **C=(0,0,2)**

Calculo los vectores $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{BP}$ y $\overrightarrow{CP}$:

$$\overrightarrow{AP} = P - A = (2,2,2) - (2,0,0) = (\mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$$

$$\overrightarrow{BP} = P - B = (2,2,2) - (0,1,0) = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$$

$$\overrightarrow{CP} = P - C = (2,2,2) - (0,0,2) = (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$$

Resolución del problema

$\overrightarrow{AP} = (\mathbf{0}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$

$\overrightarrow{BP} = (\mathbf{2}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$

$\overrightarrow{CP} = (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{0})$

Para calcular el volumen del tetraedro, lo más fácil es aplicar la fórmula correspondiente, utilizando el producto mixto:

$$\boxed{V_{tetraedro} = \frac{1}{6} \cdot \left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CP}\right]}$$

Calculo el producto mixto:

$$\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{BP}, \overrightarrow{CP}\right] = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot [0 + 8 + 8 - (4 + 0 + 0)] = \frac{1}{6} \cdot 12 = \mathbf{2}$$

El volumen del tetraedro es de **2 unidades de volumen**.

Representación gráfica del apartado c)