Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II

Julio 2021

Problema 3

Análisis de funciones e integrales

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

PAU Junio 2021
Problema 3

PAU Septiembre 2020
Problema 3

PAU Julio 2020
Problema 3

PAU Julio 2019
Problema A3

PAU Junio 2019
Problema A3

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Cálculo del dominio de una función.
2) Cálculo de las asíntotas de una función.
3) Cálculo de la primitiva de una función.

Herramientas:

1) Límites.
2) Derivadas.
3) Integrales.

El Enunciado
Estudio de la monotonía

Dada la función $f(x) = x \cdot e^{1-x^2}$, calculad:

a) El dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos.

b) Las asíntotas y la gráfica de f.

c) La integral $\int f(x)dx$.

Solución:

El dominio de esta función son todos los números reales. $\boxed{\boldsymbol{Dom\, f(x) = R}}$

Y ahora estudiamos la monotonía de la función. Se calcula la derivada de f(x) y se iguala a cero.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{1-x^2} + x \cdot e^{1-x^2} \cdot (-2x) = e^{1-x^2} \cdot (1-2x^2)$$

$$e^{1-x^2} \cdot (1-2x^2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} e^{1-x^2} = 0 \rightarrow \nexists x \epsilon R \\ 1-2x^2 = 0 \rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \end{cases}$$

Se estudia el signo de la derivada, pero lo haré en la siguiente diapositiva.

Estudio de la monotonía

$f(x) = x \cdot e^{1-x^2}$

$f'(x) = e^{1-x^2} \cdot (1 - 2x^2)$

Se estudia el signo de la derivada:

	$-\infty$ ... $-\sqrt{\frac{1}{2}}$	$-\sqrt{\frac{1}{2}}$ ... $\sqrt{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{2}}$ ... $+\infty$
f'(x)	−	+	−
f(x)	↘	↗	↘

f(x) es **decreciente** en $x\epsilon\left(-\infty, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right) \cup \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, +\infty\right)$ y **creciente** en $x\epsilon\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{2}}\right)$

Los extremos relativos serán:

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{1-\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = -\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{e} = -\sqrt{\frac{e}{2}}$$

Mínimo relativo: $\left(-\sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}}, -\sqrt{\frac{\boldsymbol{e}}{\mathbf{2}}}\right) \approx (\mathbf{-0'707, -1'166})$

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{1-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{e} = \sqrt{\frac{e}{2}}$$

Máximo relativo: $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{\boldsymbol{e}}{\mathbf{2}}}\right) \approx (\mathbf{0'707, 1'166})$

Asíntotas

b) Las asíntotas y la gráfica de f.

$f(x) = x \cdot e^{1-x^2}$

Puesto que la función está definida en R, no hay asíntotas verticales.

La **asíntota horizontal** se calcula con los límites en los infinitos.

$$\lim_{x\to\infty} x \cdot e^{1-x^2} = \infty \cdot e^{1-\infty^2} = \infty \cdot e^{-\infty} = \infty \cdot 0 = INDETERMINACIÓN$$

Se expresa el límite como cociente para poder resolverlo aplicando el teorema de L´Hopital

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^{x^2-1}} = \frac{\infty}{\infty} = INDETERMINACIÓN \xrightarrow{\text{L´Hopital}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2x \cdot e^{x^2-1}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{y = 0\ es\ A.H.\ de\ f(x)\ cuando\ x\ tiende\ a\ más\ infinito}}$$

$$\lim_{x\to-\infty} x \cdot e^{1-x^2} = -\infty \cdot e^{1-\infty^2} = -\infty \cdot e^{-\infty} = -\infty \cdot 0 = INDETERMINACIÓN$$

Se expresa el límite como cociente para poder resolverlo aplicando el teorema de L´Hopital

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{e^{x^2-1}} = \frac{-\infty}{\infty} = INDETERMINACIÓN \xrightarrow{\text{L´Hopital}} \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x \cdot e^{x^2-1}} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

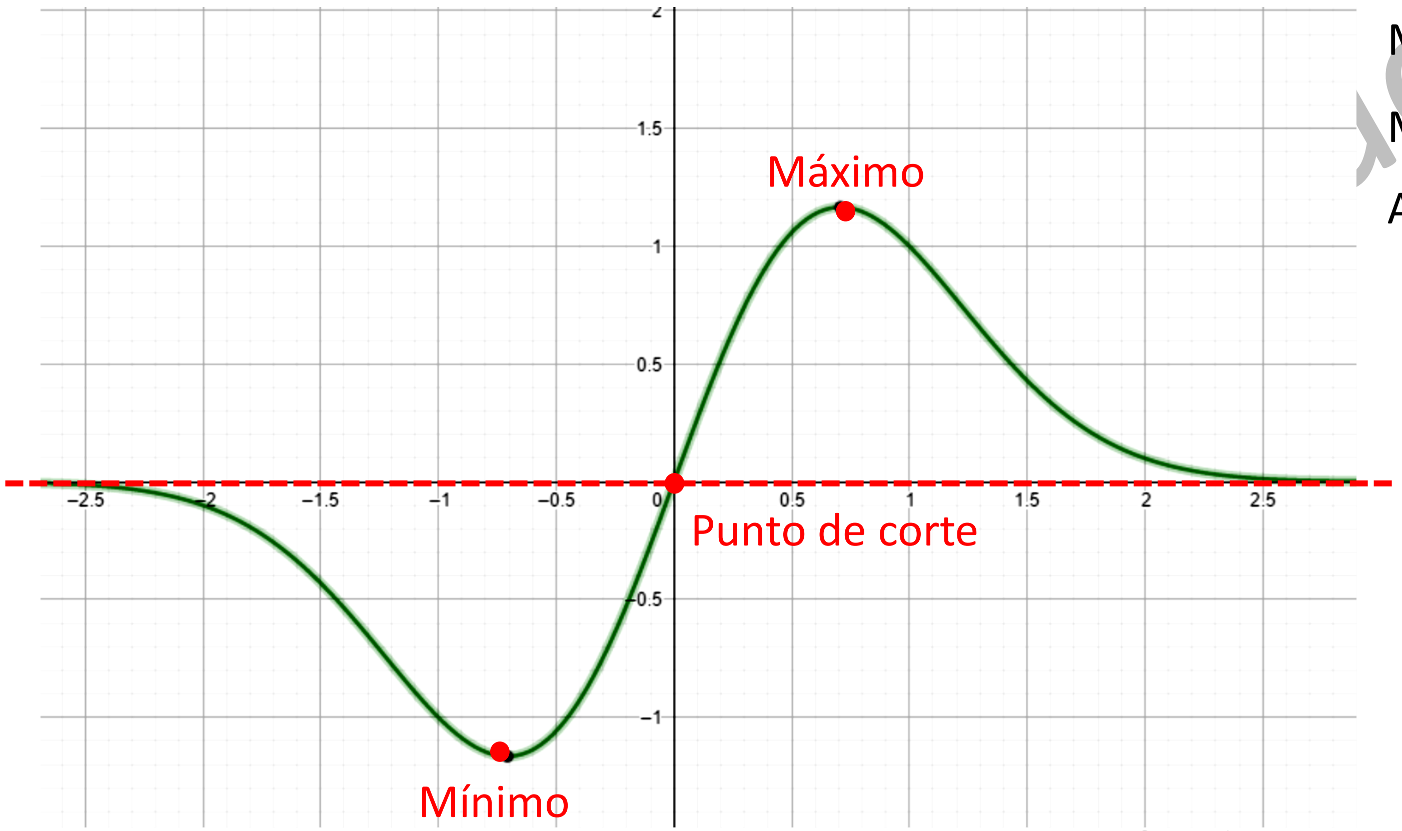
$$\boxed{\boldsymbol{y = 0\ es\ A.H.\ de\ f(x)\ cuando\ x\ tiende\ a\ menos\ infinito}}$$

Gráfica

Aunque no nos piden los puntos de corte con los ejes, para hacer la gráfica necesito calcularlos.

Eje X (y=0): $x \cdot e^{1-x^2} = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^{1-x^2} = 0 \to \nexists x \epsilon R \end{cases} \longrightarrow$ El punto de corte con el eje X es **(0,0)**

Eje Y (x=0): $f(0) = 0 \cdot e^{1-0^2} = 0 \longrightarrow$ El punto de corte con el eje Y es **(0,0)**



Mínimo relativo: $\approx (\mathbf{-0'707, -1'166})$

Máximo relativo: $\approx (\mathbf{0'707, 1'166})$

Asíntota horizontal en y=0

Calculo de la integral

$f(x) = x \cdot e^{1-x^2}$

$$\int f(x)\,dx = \int x \cdot e^{1-x^2}\,dx = \int \frac{-2}{-2} \cdot x \cdot e^{1-x^2}\,dx = -\frac{1}{2} \cdot \int -2 \cdot x \cdot e^{1-x^2}\,dx = \boxed{-\frac{1}{2} \cdot e^{1-x^2} + C}$$

Estamos ante una integral semiinmediata. Ello es debido a que casi coincide con la fórmula de integración de las funciones exponenciales.

$$\boxed{\int f'(x) \cdot e^{f(x)}\,dx = e^{f(x)} + C}$$

Debo multiplicar y dividir por -2 para obtener una integral que se ajuste a la fórmula.