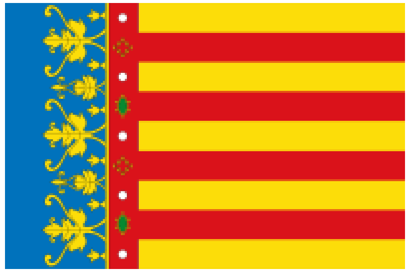
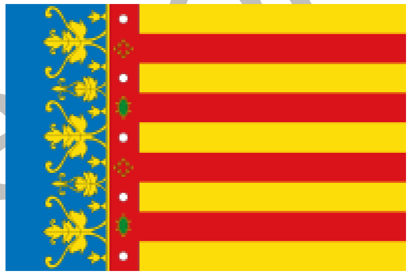
Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Julio 2021



Problema 4
Álgebra matricial

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Rango de una matriz en función de un parámetro
2) Invertibilidad de una matriz.
3) Cálculo de la matriz inversa.

Herramientas utilizadas:

1) Matrices
2) Determinantes

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este misma canal.

PAU Junio 2021
Problema 4

PAU Septiembre 2020
Problema 4

PAU Julio 2020
Problema 4

PAU Julio 2019
Problema B1

PAU Junio 2019
Problema A1

Rango de una matriz

El Enunciado

Se dan las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, se pide:

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a.

b) Una matriz C tal que AC = 16 I, siendo I la matriz identidad, cuando a = 0.

c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución.

Solución:

Utilizaré el método de los adjuntos para obtener el rango de la matriz.

Calculo el determinante de A y lo igualo a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{vmatrix} = -4a^2 + 16 = -4 \cdot (a-2) \cdot (a+2)$$

$$|A| = -4 \cdot (a-2) \cdot (a+2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} a-2=0 \\ a+2=0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=2 \\ a=-2 \end{cases}$$

Rango de una matriz

Ecuación matricial

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & a & 1 \\ 1 & a^2-2 & 3 \end{pmatrix}$$

a) El rango de la matriz A según los valores del parámetro a.

Si a≠2 y a ≠−2, entonces $|A|$ ≠0. Por ello, **Ran(A)=3**

Si a=2 o a = −2, entonces $|A|$ =0. Por ello, **Ran(A)<3,** debo comprobar en estos casos si el rango de la matriz es 1 o 2.

Si a= 2, calculo un menor de orden 2. $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2+2=4\neq 0$ por ello podemos afirmar que en este caso, **Ran(A)=2**

Si a=−2, calculo un menor de orden 2. $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 2+6=8\neq 0$ por ello podemos afirmar que en este caso, **Ran(A)=2**

Resumiendo:

Si a≠2 y a ≠−2, **Ran(A)=3**
Si a=2 o a = −2, **Ran(A)=2**

b) Una matriz C tal que AC = 16 I, siendo I la matriz identidad, cuando a = 0.

Se despeja C de la ecuación matricial utilizando la matriz inversa de A.

$$A\cdot C=16\cdot I \longrightarrow A^{-1}\cdot A\cdot C=A^{-1}\cdot 16\cdot I \longrightarrow I\cdot C=16\cdot A^{-1} \longrightarrow C=16\cdot A^{-1}$$

Para poder hallar C, debemos calcular la matriz inversa de A.

Cálculo de la matriz inversa

Calcularé la matriz inversa mediante el algoritmo de los adjuntos:

1) Calculo $|A|$; $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 + 6 + 2 - 0 + 6 + 2 = 16 \neq 0$

Al ser el determinante distinto de cero, la matriz A **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ -12 & 0 & 4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $(A)^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \left(Adj(A)\right)^t \longrightarrow (A)^{-1} = \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Ya puedo calcular C: $C = 16 \cdot A^{-1} = 16 \cdot \frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -12 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \\ 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}}$

Resolución de una ecuación matricial

c) El rango de la matriz B y la discusión de si el sistema $B \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ tiene solución.

Calculo el valor de la matriz B $\quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Como se puede comprobar a simple vista, las 3 filas son proporcionales, por lo tanto **el rango de la matriz B es igual a 1.**

Para que dicho sistema tenga solución, el rango de la matriz ampliada definida por el sistema de ecuaciones debe ser igual a 1. Ya que, según el teorema de Rouché, si éste fuera 2 o 3, el sistema sería incompatible y no tendría solución.

La matriz ampliada es: $B^* = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & -3 & -1 \\ 2 & 4 & 6 & 2 \end{pmatrix}$

Como se puede comprobar a simple vista, las 3 filas son proporcionales, por lo tanto **el rango de la matriz B^* es igual a 1.**

Por ello y tal como hemos dicho antes, según el teorema de Rouché el sistema sería compatible indeterminado y **tendría infinitas soluciones.**