Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II
Julio 2021

Problema 5
Geometría

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Ecuaciones de planos y rectas.
2) Distancia entre dos rectas paralelas.
3) 3 puntos alineados.

Herramientas utilizadas.

1) Determinantes
2) Vectores.

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

PAU Junio 2021
Problema 2

PAU Junio 2021
Problema 5

PAU Septiembre 2020
Problema 2

PAU Septiembre 2020
Problema 5

PAU Julio 2020
Problema 2

PAU Julio 2020
Problema 5

Resolución del problema

El enunciado

Dados los puntos $P=(1,1,0), Q=(2,-1,1)\ y\ R=(\alpha,3,-1)$ se pide:

a) La ecuación del plano que contiene a P, Q y R cuando α = 1 y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas.

b) La ecuación de la recta r que pasa por R cuando α = 1 y es paralela a la recta s que pasa por P y Q. Calculad la distancia entre las rectas r y s.

c) Los valores de α para los cuales P, Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene.

Solución:

Dados los puntos $P=(1,1,0), Q=(2,-1,1)\ y\ R=(1,3,-1)$ se calcula la ecuación general del plano:

Calculo el vector director del plano que pasa por P y Q: $\vec{v}=\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(2,-1,1)-(1,1,0)=(1,-2,1)$

Calculo el vector director del plano que pasa por P y R: $\vec{w}=\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OP}=(1,3,-1)-(1,1,0)=(0,2,-1)$

Con los dos vectores directores del plano y un punto (P, Q o R), ya puedo calcular la ecuación implícita del plano.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-0 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0 \longrightarrow (x-1)\cdot\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}-(y-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}+z\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}=0$$

$$(x-1)\cdot 0-(y-1)\cdot(-1)+z\cdot 2=0 \longrightarrow y-1+2z=0 \longrightarrow y+2z-1=0$$

La ecuación del plano será: **π: y+2z−1=0**

Resolución del problema

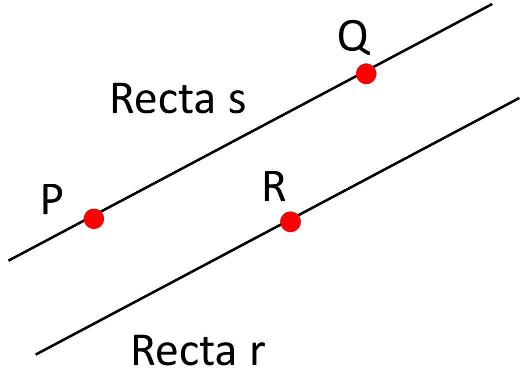
a) La ecuación del plano que contiene a P, Q y R cuando $\alpha = 1$ y la distancia de dicho plano al origen de coordenadas.

Para determinar la distancia de un punto a un plano, lo más rápido es aplicar la fórmula correspondiente.

$$d_{P\pi} = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|0 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2}} = \boxed{\frac{\mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{5}}}\ \textit{unidades de longitud}}$$

b) La ecuación de la recta r que pasa por R cuando $\alpha = 1$ y es paralela a la recta s que pasa por P y Q. Calculad la distancia entre las rectas r y s.

$P = (1,1,0), Q = (2,-1,1)\ y\ R = (1,3,-1)$



Calculo el vector director de la recta s, que será el mismo que el de la recta r, puesto que son paralelas:

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (2,-1,1) - (1,1,0) = (1,-2,1)$$

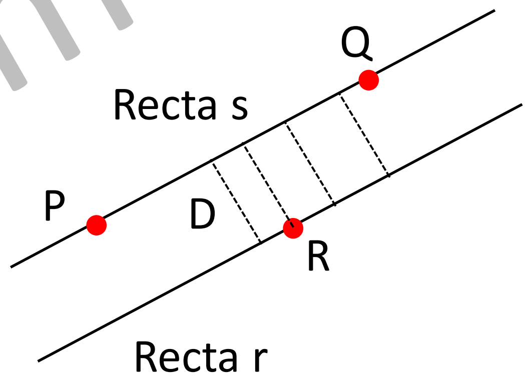
A partir de los datos, obtengo las ecuaciones paramétricas de ambas rectas.

$$\boxed{s: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases} ,\lambda \epsilon R} \qquad \boxed{r: \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 3 - 2\mu \\ z = -1 + \mu \end{cases} ,\mu \epsilon R}$$

Resolución del problema

b) La ecuación de la recta r que pasa por R cuando α = 1 y es paralela a la recta s que pasa por P y Q. Calculad la distancia entre las rectas r y s.

Puesto que las rectas son paralelas, basta con calcular la distancia de un punto de una de ellas a la otra recta. Por ejemplo la distancia del punto R a la recta s.



La forma más rápida de calcular la distancia de un punto a una recta es utilizar la fórmula correspondiente.

$$\boxed{D_{Rs} = \frac{\left|\overrightarrow{RP} \times \vec{v}\right|}{|\vec{v}|}}$$

Calculo el vector que va desde R hasta P. $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR} = (1,1,0) - (1,3,-1) = (0,-2,1)$

Calculo el producto vectorial. $\overrightarrow{RP} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = -2\vec{i} + \vec{j} - (-2\vec{k} - 2\vec{i}) = \vec{j} + 2\vec{k}$

Calculo $\left|\overrightarrow{RP} \times \vec{v}\right|$: $\left|\overrightarrow{RP} \times \vec{v}\right| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ Calculo $|\vec{v}|$: $|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{6}$

Ya podemos terminar el cálculo: $d_{Rs} = \dfrac{|(0,-2,1) \times (1,-2,1)|}{|(2,1,-1)|} = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{30}}{6}$

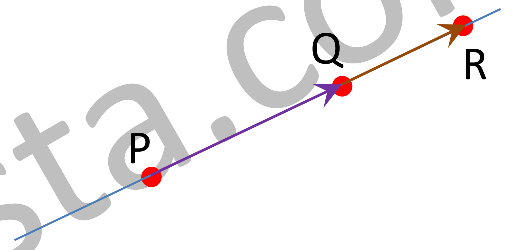
$\boxed{\text{La distancia entre las rectas r y s es } \sqrt{30}/6 \text{ unidades de longitud.}}$

Resolución del problema

Dados los puntos $P=(1,1,0), Q=(2,-1,1)\ y\ R=(\alpha,3,-1)$ se pide:

c) Los valores de α para los cuales P, Q y R están alineados y la ecuación de la recta que los contiene.

3 puntos están alineados si los vectores que los unen son paralelos.



Calculo los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QR}$

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(2,-1,1)-(1,1,0)=(1,-2,1)$$

$$\overrightarrow{QR}=\overrightarrow{OR}-\overrightarrow{OQ}=(\alpha,3,-1)-(2,-1,1)=(\alpha-2,4,-2)$$

Dos vectores son paralelos si sus componentes son proporcionales.

$$\frac{1}{\alpha-2}=\frac{-2}{4}=\frac{1}{-2}\longrightarrow\frac{1}{\alpha-2}=\frac{1}{-2}\longrightarrow\alpha=\mathbf{0}$$

El valor de α para que los puntos estén alineados es **0.**

A partir de un punto (P) y del vector director $\overrightarrow{PQ}$ obtengo la ecuación de la recta. Nos damos cuenta de que es la misma recta s que ya habíamos calculado anteriormente.

$$s:\begin{cases}x=1+\lambda\\ y=1-2\lambda \quad ,\lambda\epsilon R\\ z=\lambda\end{cases}$$