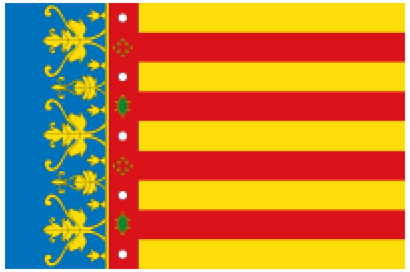
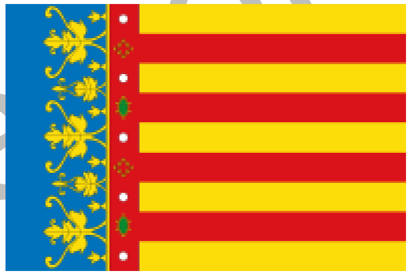
Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2021



Problema 6

Problema de optimización

ADVERTENCIA

- Toma LÁPIZ y PAPEL y trabaja tomando apuntes como si estuvieras en una clase presencial.
- No seas un alumno PASIVO, como el espectador de una película, sino un alumno ACTIVO.

Edición de vídeo: Vanessa Quintana
Fotografía y vídeo.

Conceptos necesarios

Los conceptos que utilizaremos para resolver este ejercicio son:

1) Optimización de funciones.
2) Estudio de la monotonía y criterio de la segunda derivada.

Herramientas utilizadas:

1) Funciones.
2) Derivadas.

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

PAU Junio 2021
Problema 6

PAU Septiembre 2020
Problema 6

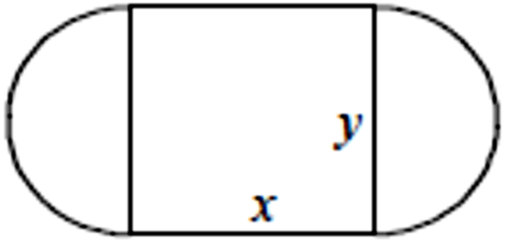
PAU Julio 2020
Problema 6

PAU Julio 2019
Problema B3

PAU Junio 2019
Problema B3

Obteniendo la función
El enunciado

Queremos diseñar un campo de juego de modo que la parte central sea rectangular, y las partes laterales sean semicircunferencias hacia fuera. La superficie del campo mide (4 + π) metros cuadrados. Se quieren pintar todas las rayas de dicho campo tal y como se observa en la figura. Se pide:



a) Escribid la longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo.

b) Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima.

Solución:

El área del campo es: $A = A_{rectángulo} + A_{círculo} = x \cdot y + \pi \cdot \left(\frac{y}{2}\right)^2$

Debemos tener en cuenta que el radio de la parte circular del campo es **y/2**.

Igualamos el área del enunciado a la expresión obtenida: $x \cdot y + \pi \cdot \frac{y^2}{4} = 4 + \pi \longrightarrow 4 \cdot x \cdot y + \pi \cdot y^2 = 16 + 4\pi$

Despejamos x: $4 \cdot x \cdot y = 16 + 4\pi - \pi \cdot y^2 \longrightarrow x = \frac{16 + 4\pi - \pi \cdot y^2}{4 \cdot y}$

La longitud total de las rayas del campo es: $L = L_{rectángulo} + L_{círcunferencia} = 2x + 2y + 2\pi \cdot \frac{y}{2} = 2x + 2y + \pi \cdot y$

Se sustituye el valor de x: $L = 2\left(\frac{16 + 4\pi - \pi \cdot y^2}{4 \cdot y}\right) + 2y + \pi y = \frac{8 + 2\pi}{y} - \frac{\pi}{2} \cdot y + 2y + \pi y = \boxed{\boldsymbol{\frac{8 + 2\pi}{y} + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) \cdot y}}$

Obteniendo la función

Una vez obtenida la función, debemos calcular su dominio de definición para terminar el ejercicio correctamente.

Recordamos que: $x = \dfrac{16 + 4\pi - \pi \cdot y^2}{4 \cdot y}$

Puesto que x debe ser positiva: $\dfrac{16 + 4\pi - \pi \cdot y^2}{4 \cdot y} > 0 \longrightarrow 16 + 4\pi - \pi \cdot y^2 > 0 \longrightarrow 16 + 4\pi > \pi \cdot y^2$

$$y^2 < \frac{16 + 4\pi}{\pi}$$

Puesto que el término de la derecha de la inecuación es positivo, puedo afirmar que y mayor que 1: $y < \sqrt{\dfrac{16 + 4\pi}{\pi}}$

Mucho cuidado con este último despeje. Sólo es válido con las condiciones indicadas.

Una vez acotada superiormente la variable y, y teniendo en cuenta que y debe ser mayor que cero, podemos dar el dominio de la función y la solución completa.

La longitud total de las rayas del campo en función de la altura y del rectángulo es:

$$\boxed{\boldsymbol{L = \frac{8 + 2\pi}{y} + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right) \cdot y \quad , y \in \left(0, \sqrt{\frac{16 + 4\pi}{\pi}}\right)}}$$

Optimizando la función

b) Calculad las dimensiones del campo para que la pintura usada sea mínima.

Una vez obtenida la función, debemos calcular el mínimo de dicha función en su dominio de definición. Para ello, en primer lugar se hará la derivada y se igualará a cero.

$$L = \frac{8+2\pi}{y} + \left(\frac{\pi}{2}+2\right)\cdot y \quad , y \in \left(0, \sqrt{\frac{16+4\pi}{\pi}}\right) \longrightarrow L' = \frac{-(8+2\pi)}{y^2} + \left(\frac{\pi}{2}+2\right)$$

$$\frac{-(8+2\pi)}{y^2} + \left(\frac{\pi}{2}+2\right) = 0 \longrightarrow \frac{(8+2\pi)}{y^2} = \left(\frac{\pi}{2}+2\right) \longrightarrow y^2 = \frac{8+2\pi}{\left(\frac{\pi}{2}+2\right)} \longrightarrow y = \sqrt{\frac{8+2\pi}{\left(\frac{\pi}{2}+2\right)}} = 2$$

Podemos comprobar que y=2 pertenece al dominio de la función, ya que: $\sqrt{\frac{16+4\pi}{\pi}} \approx 3'015$

Para demostrar que y=2 es un mínimo de la función, utilizaré el **criterio de la segunda derivada** (con fines pedagógicos). Haré el estudio de signo de la derivada al final del vídeo para que podáis comparar ambos métodos.

Optimizando la función

El **criterio de la segunda derivada** nos dice que para que un valor de y sea mínimo, $f''(y_0)>0$, donde y_0 es el valor que anula la primera derivada.

Calculo la segunda derivada:

$$L' = \frac{-(8+2\pi)}{y^2} + \left(\frac{\pi}{2}+2\right) \longrightarrow L'' = \frac{2\cdot(8+2\pi)}{y^3}$$

Sustituyo y=2 en la segunda derivada y compruebo si es mayor que cero. $L'' = \dfrac{2\cdot(8+2\pi)}{2^3} > 0$

Podemos afirmar que cuando y=2, el valor de la función longitud es mínimo.

Calculo el valor de x: $x = \dfrac{16+4\pi-\pi\cdot y^2}{4\cdot y} = \dfrac{16+4\pi-\pi\cdot 2^2}{4\cdot 2} = 2$

Para que la longitud de las líneas a pintar sea mínima, las dimensiones de **la parte rectangular deben ser de 2 por 2 metros**. **Los semicírculos tendrán un diámetro de 2 metros, y una longitud de π metros cada uno**.

Optimizando la función

Se hace un estudio de signos de la derivada L'(x): $L' = \frac{-(8+2\pi)}{y^2} + \left(\frac{\pi}{2} + 2\right)$

	0 → 2	2 → $\sqrt{\frac{16+4\pi}{\pi}} \approx 3'015$
L(y)	↘	↗
L'(y)	−	+

$L(y)\ es\ decreciente\ si\ x \in (0,2)$

$L(y)\ es\ decreciente\ si\ x \in \left(2, \sqrt{\frac{16+4\pi}{\pi}}\right]$

El mínimo relativo de L(y) está en y = 2

El resto del ejercicio se hace tal como he hecho antes.

Calculo el valor de x: $x = \frac{16+4\pi-\pi\cdot y^2}{4\cdot y} = \frac{16+4\pi-\pi\cdot 2^2}{4\cdot 2} = 2$

Para que la longitud de las líneas a pintar sea mínima, las dimensiones de **la parte rectangular deben ser de 2 por 2 metros**. **Los semicírculos tendrán un diámetro de 2 metros, y una longitud de π metros cada uno**.