

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2022



Problema 1

Discusión de un sistema de ecuaciones

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

En estos vídeos podrás repasar temas interesantes para preparar este examen.

No dejes de revisar mi canal, pues iré añadiendo nuevos.



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este misma canal.



PAU Julio 2021



PAU Junio 2021



PAU Septiembre 2020



PAU Julio 2020



PAU Julio 2019

El Enunciado

Dado el sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + ay + (a - 1)z = a \end{cases}$$

- a) Discutir el sistema en función del parámetro real a .
- b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible.

Solución:

Para discutir el sistema de ecuaciones se utilizará el teorema de Rouché

Definimos la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a - 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & a - 1 & a \end{pmatrix}$$

Cálculo del rango de A en función de a utilizando su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a - 1 \end{vmatrix} = -a^2 - a + 2 \longrightarrow -a^2 - a + 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ a = 1 \end{cases}$$

Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$ entonces $|A| \neq 0$, $\text{Ran}(A) = 3 \longrightarrow \text{Ran}(A^*) = 3$

Si $a = -2$ o $a = 1$ entonces $|A| = 0$, $\text{Ran}(A) < 3 \longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A^* sustituyendo los valores de a en las matrices.

En esta ocasión, calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A^* utilizando el método de Gauss para los valores concretos de a . También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

Discusión del Sistema

$$\text{Si } a = -2 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

A

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=2F_2+F_1 \\ F_3=2F_3+F_1}]{\substack{F_2=2F_2+F_1 \\ F_3=2F_3+F_1}} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3+3F_2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

A

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A* tiene las tres filas linealmente independientes. Para $a = -2$, **Ran(A) = 2 y Ran(A*) = 3.**

$$\text{Si } a = 1 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}]{\substack{F_2=F_2-F_1 \\ F_3=F_3-F_1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A

Al finalizar el método de Gauss se observa que tanto A como A* tienen dos filas linealmente independientes por lo que para $a = 1$, **Ran(A) = 2 y Ran(A*) = 2.**

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 & a \end{pmatrix}$$

Discusión y resolución del Sistema

Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado a).

	Ran(A)	Ran(A*)	Nº incógnitas	Tipo de Sistema	Número de soluciones
Si $a \neq -2$ y $a \neq 1$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $a = -2$	2	3	3	S.I.	Sin solución
Si $a = 1$	2	2	3	S.C.I.	Infinitas

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + ay + (a-1)z = a \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 & a \end{pmatrix}$$

b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible.

Puesto que para $a=1$ el sistema es Compatible Indeterminado, podemos utilizar la misma matriz escalonada que obtuvimos para discutir el sistema, para obtener las infinitas soluciones.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ -y + z = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ z = \lambda; y = \lambda \end{cases} \longrightarrow x + \lambda = 1 \longrightarrow x = 1 - \lambda$$

La solución del sistema para $a = 1$ es:

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Resolución del Sistema

Como ya demostramos, el Sistema es Compatible Determinado para todos los valores reales excepto -2 y 1 . Resolveré el sistema en función del parámetro, utilizando la regla de Cramer.

Recordamos que: $|A| = -a^2 - a + 2 \rightarrow -(a - 1) \cdot (a + 2)$

OJO A LA FACTORIZACIÓN

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ a & a & a-1 \end{vmatrix}}{-a^2 - a + 2} = \frac{-a + 1}{-a^2 - a + 2} = \frac{-(a - 1)}{-(a - 1) \cdot (a + 2)} = \boxed{\frac{1}{a + 2}}$$

$$y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{vmatrix}}{-a^2 - a + 2} = \frac{-2a + 2}{-a^2 - a + 2} = \frac{-2 \cdot (a - 1)}{-(a - 1) \cdot (a + 2)} = \boxed{\frac{2}{a + 2}}$$

$$z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a \end{vmatrix}}{-a^2 - a + 2} = \frac{-a^2 + 1}{-a^2 - a + 2} = \frac{-(a + 1) \cdot (a - 1)}{-(a - 1) \cdot (a + 2)} = \boxed{\frac{a + 1}{a + 2}}$$

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + ay + (a - 1)z = a \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & a & a-1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & a & a-1 & a \end{pmatrix}$$

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2022



Problema 2

Álgebra matricial

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



En mi página web podrás encontrar muchos más ejercicios de este tema

angelcuesta.com

Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



ÁNGEL CUESTA

Tu profesor en la red

SUSCRÍBETE

Problema 2

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$

a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4 .

c) Calcular $\text{Det}(A^{-50})$ cuando $a^2 - b^2 \neq 0$.

Solución: El producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad. $A \cdot A^{-1} = I$

Calculo el producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b) \cdot 1 + 1 \cdot 0 & (a+b) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + (a-b) \cdot 0 & 0 \cdot (-1) + (a-b) \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -a-b+1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$$

Se iguala el resultado a la matriz identidad. $\begin{pmatrix} a+b & -a-b+1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dos matrices son iguales si sus elementos también lo son, por eso los términos a_{ij} de cada matriz.

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -a-b+1=0 \\ a-b=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a-b=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$

Problema 2

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$

b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4 .

Sustituyendo $a=1$ y $b=0$ en la matriz A , esta quedaría escrita de la siguiente forma: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculo en primer lugar A^2 . $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculo A^3 . $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Calculo A^4 . $A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$

Problema 2

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$

c) Calcular $\text{Det}(A^{-50})$ cuando $a^2 - b^2 \neq 0$.

Antes de comenzar, se debe aclarar una cuestión de nomenclatura del ejercicio. A^{-50} , es la forma de expresar la matriz inversa de A^{50} . $A^{-50} = (A^{50})^{-1}$

Se aplican las propiedades de los determinantes. $\text{Det}(A^{-50}) = \text{Det}[(A^{50})^{-1}] = \frac{1}{\text{Det}(A^{50})} = \frac{1}{(\text{Det}(A))^{50}}$

Propiedad de la matriz inversa: $\text{Det}(A^{-1}) = \frac{1}{\text{Det}(A)}$

Propiedad de la potencia de una matriz: $\text{Det}(A^n) = (\text{Det}(A))^n$

Calculo el determinante de A: $\text{Det}(A) = \begin{vmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$

Se calcula el determinante pedido: $\text{Det}(A^{-50}) = \frac{1}{(\text{Det}(A))^{50}} = \frac{1}{(a^2 - b^2)^{50}}$

Solución: $\text{Det}(A^{-50}) = \frac{1}{(a^2 - b^2)^{50}}$

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2022



Problema 3

Geometría

©Angel Cuesta Arza

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Teoría de Matrices y
Geometría



PAU Julio 2021
Problema 2



PAU Julio 2021
Problema 5



PAU Junio 2021
Problema 2



PAU Junio 2021
Problema 5



PAU Septiembre 2020
Problema 2



PAU Septiembre 2020
Problema 5



PAU Julio 2020
Problema 2

En mi página web podrás encontrar muchos más ejercicios de este tema

angelcuesta.com

PROBLEMA 3

Dados los puntos $A=(2,0,0)$ y $B=(0,1,0)$, y la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$

- Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B .
- Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r .
- Calcular la distancia del punto A a la recta s .

Solución: Escribiré la recta en distintas formas con fines pedagógicos.

1) Calculo el vector director. $\vec{v} = B - A = (0,1,0) - (2,0,0) = (-2,1,0)$

2) Escribo la ecuación vectorial: $r: (x,y,z) = (2,0,0) + \lambda \cdot (-2,1,0)$

3) Escribo las ecuaciones paramétricas: $r: \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$

4) Escribo la ecuación continua: $r: \frac{x-2}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{0}$

5) Escribo la ecuación de la recta como intersección de dos planos a partir de las ecuaciones paramétricas, ya que tengo una despejada.

$$r: \begin{cases} x = 2 - 2y \\ z = 0 \end{cases} \longrightarrow r: \begin{cases} x + 2y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$$

PROBLEMA 3

Dadas los puntos $A=(2,0,0)$ y $B=(0,1,0)$, y la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$

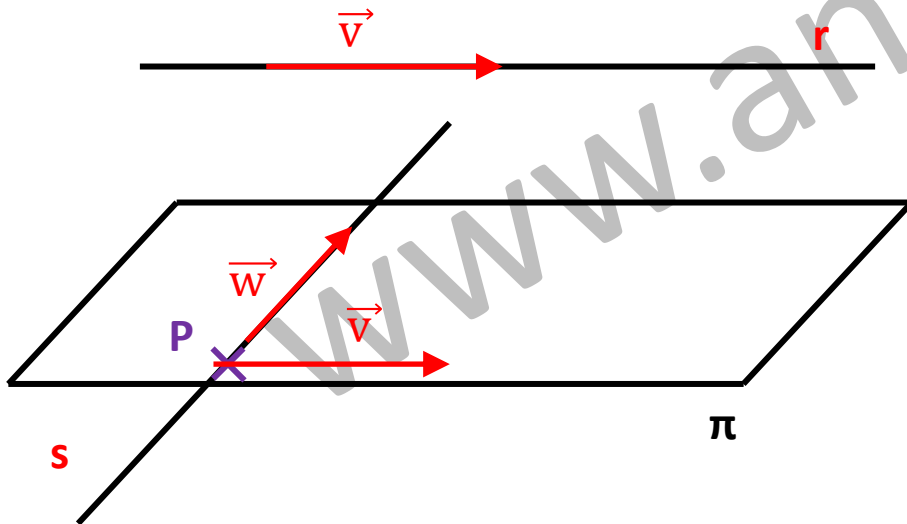
b) Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r .

Recordamos el vector director de r : $\vec{v} = B - A = (0,1,0) - (2,0,0) = (-2,1,0)$

Hacemos un esquema de la situación para entender mejor los pasos que haremos a continuación.

Siendo el vector director de s : $\vec{w} = (2,3,1)$

Además de los dos vectores directores del plano, necesitamos un punto del plano. Puesto que la recta s está incluida en el plano, podemos tomar un punto de la recta s . $P=(1,1,0)$.



PROBLEMA 3

Dadas los puntos $A=(2,0,0)$ y $B=(0,1,0)$, y la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$

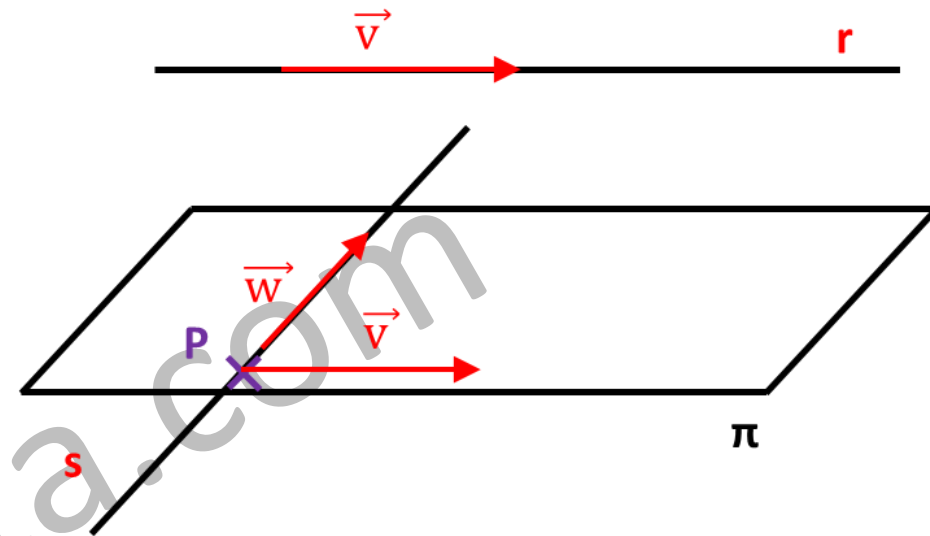
b) Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r .

Calculo la ecuación general (o implícita) del plano mediante determinantes.

Recordamos datos: $\vec{v} = (-2,1,0)$; $\vec{w} = (2,3,1)$ y $P = (1,1,0)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow x + 2y - 8z - 3 = 0$$

La ecuación del plano es: $\pi: x + 2y - 8z - 3 = 0$



PROBLEMA 3

Dadas los puntos $A=(2,0,0)$ y $B=(0,1,0)$, y la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$

c) Calcular la distancia del punto A a la recta s .

Se calcula como la distancia del punto A a su proyección ortogonal sobre la recta, ya que estamos calculando la mínima distancia del punto a la recta.

El método más directo es aplicar la fórmula que nos da la distancia de un punto a una recta.

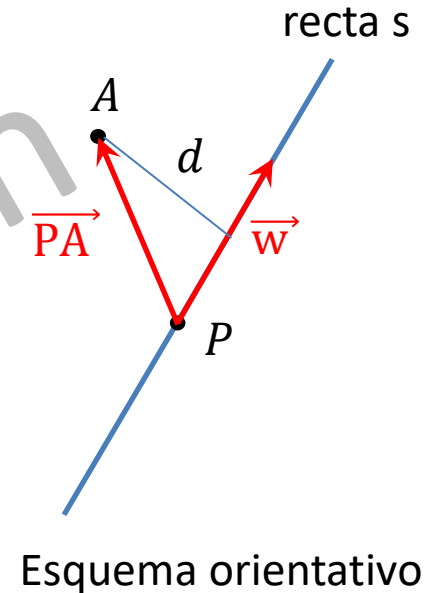
$$d_{As} = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{w}|}{|\overrightarrow{w}|}$$

Siendo, $\overrightarrow{w}$ el vector director de la recta s
 P un punto de la recta s
 A el punto al cual se calcula la distancia desde s
 $\overrightarrow{PA}$ el vector que va desde P hasta A .

Siendo el punto P de la recta s : $P = (1,1,0)$ Y el vector director: $\overrightarrow{w} = (2,3,1)$

Calculo el vector $\overrightarrow{PA}$: $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = (2,0,0) - (1,1,0) = (1,-1,0)$

$$\text{Calculo } \overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{w}: \overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 3\vec{k} - (-2\vec{k} + \vec{j}) = -\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$$



PROBLEMA 3

Se calcula el módulo de $\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{w}$:

$$|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{w}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + 5^2} = \sqrt{27} = 3 \cdot \sqrt{3}$$

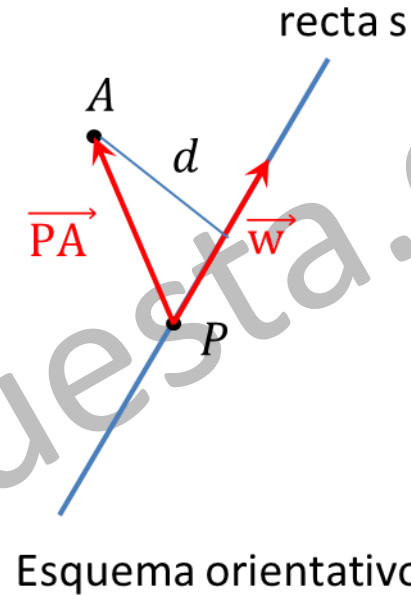
Se calcula el módulo de $\overrightarrow{w}$:

$$|\overrightarrow{w}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

Se aplica la fórmula y se calcula la distancia.

$$d_{Br} = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{w}|}{|\overrightarrow{w}|} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{3 \cdot \sqrt{42}}{14} \approx \mathbf{1'389 \text{ u.l.}}$$

La distancia del punto A a la recta s es $\frac{3 \cdot \sqrt{42}}{14} \text{ u.l.}$ que son $\mathbf{1'389 \text{ u.l}}$ aproximadamente.



Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2022



Problema 4

Geometría

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Teoría de Matrices y
Geometría



PAU Julio 2021
Problema 2



PAU Julio 2021
Problema 5



PAU Junio 2021
Problema 2



PAU Junio 2021
Problema 5



PAU Septiembre 2020
Problema 2



PAU Septiembre 2020
Problema 5



PAU Julio 2020
Problema 2

En mi página web podrás encontrar muchos más ejercicios de este tema

angelcuesta.com

PROBLEMA 4

Dados los puntos $A = (2, 1, -2)$ y $B = (3, 2, 3)$, y el plano π definido por $2x + 2y + z = 3$, obtener:

- El punto de corte C entre el plano π y la recta perpendicular a π que pasa por B .
- El área del triángulo cuyos vértices son A , B y C .

Solución:

Hacemos un esquema de la situación e indicamos los pasos que seguiremos:

1) Anotamos el vector normal del plano. $\vec{n} = (2, 2, 1)$

2) Definimos una recta que pasa por B y tiene por vector director al normal del plano.

$$r: \begin{cases} x = 3 + 2\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 3 + \lambda \end{cases}$$

3) Se calcula la intersección entre la recta y el plano.

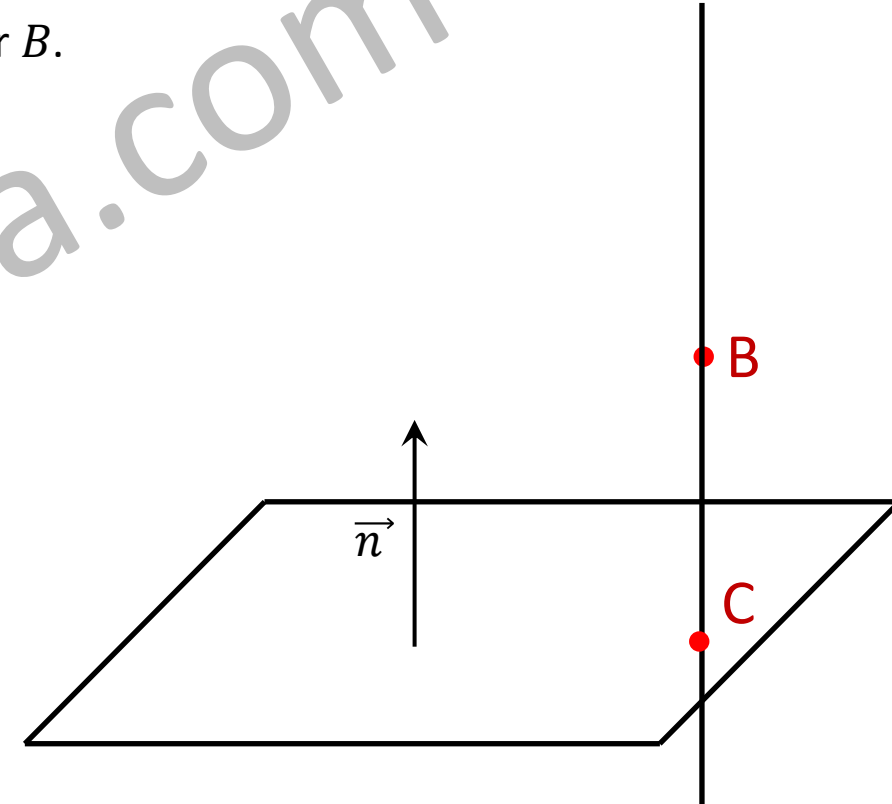
Se sustituye r en π :

$$2x + 2y + z = 3 \longrightarrow 2 \cdot (3 + 2\lambda) + 2 \cdot (2 + 2\lambda) + 3 + \lambda = 3$$

$$6 + 4\lambda + 4 + 4\lambda + 3 + \lambda = 3 \longrightarrow 9\lambda = -10 \longrightarrow \lambda = -\frac{10}{9}$$

Se sustituye el valor de λ en la ecuación de la recta y se obtienen las coordenadas del punto C .

$$C = \left(\frac{7}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{17}{9} \right)$$



PROBLEMA 4

Dados los puntos $A = (2, 1, -2)$ y $B = (3, 2, 3)$, y el plano π definido por $2x + 2y + z = 3$, obtener:

b) El área del triángulo cuyos vértices son A , B y C .

Recordamos las coordenadas del punto C : $C = \left(\frac{7}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{17}{9}\right)$

Se calcula el área del triángulo mediante la fórmula correspondiente. $A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$

Calculo los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ $\overrightarrow{AB} = B - A = (3, 2, 3) - (2, 1, -2) = (1, 1, 5)$

$$\overrightarrow{AC} = C - A = \left(\frac{7}{9}, -\frac{2}{9}, \frac{17}{9}\right) - (2, 1, -2) = \left(-\frac{11}{9}, -\frac{11}{9}, \frac{35}{9}\right)$$

Calculo primero el producto vectorial: $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 5 \\ -\frac{11}{9} & -\frac{11}{9} & \frac{35}{9} \end{vmatrix} = 10\vec{i} - 10\vec{j}$

Calculo el módulo: $|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}| = \sqrt{10^2 + 10^2 + 0^2} = \sqrt{200} = 10 \cdot \sqrt{2}$

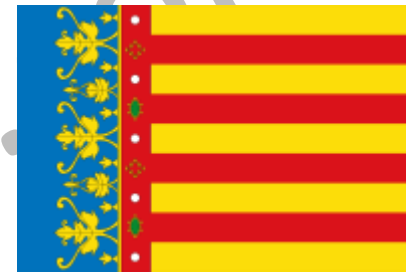
Siendo el área: $A_{\text{triángulo}} = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2} \text{ u.a.} \approx 7.07 \text{ u.a.}$

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Junio 2022



Problema 5
Cálculo integral

PROBLEMA 5

a) Calcular, indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx.$$

b) Determinar, en función de t , el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx$.

c) Determinar el valor de t mayor que 8 para que $\int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx$ sea igual a $\ln \frac{25}{4}$.

Debemos resolver esta integral racional. Para ello, debemos comprobar cuales son las raíces del polinomio del denominador.

$$x^2 - 5x - 14 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Como se puede ver, el polinomio posee dos raíces reales que además son diferentes entre ellas. Por ello, para resolver la integral se debe factorizar el denominador y a continuación, resolver la integral mediante la factorización lineal de la expresión que se quiere integrar.

PROBLEMA 5

$$x^2 - 5x - 14 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 7 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

a) Calcular, indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida:

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx.$$

Calculo los valores de A y B para factorizar linealmente la expresión.

$$\frac{18}{x^2 - 5x - 14} = \frac{A}{x - 7} + \frac{B}{x + 2} = \frac{A \cdot (x + 2)}{(x - 7) \cdot (x + 2)} + \frac{B \cdot (x - 7)}{x \cdot (x + 2)} \longrightarrow 18 = A \cdot (x + 2) + B \cdot (x - 7)$$

Se dan los valores de las raíces.

$$\text{Si } x=7 \longrightarrow 18 = 9A \longrightarrow A = 2 \quad \text{Si } x=-2 \longrightarrow 18 = -9B \longrightarrow B = -2$$

Quedando la integral:

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx = \int \frac{A}{x - 7} dx + \int \frac{B}{x + 2} dx = \int \frac{2}{x - 7} dx + \int \frac{-2}{x + 2} dx = 2 \cdot \int \frac{1}{x - 7} dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x + 2} dx$$

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx = 2 \cdot \ln|x - 7| - 2 \cdot \ln|x + 2| + C = \boxed{\ln \left(\frac{x - 7}{x + 2} \right)^2 + C}$$

PROBLEMA 5

b) Determinar, en función de t , el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} dx$.

Se aplica la regla de Barrow para obtener el valor de la integral definida.

$$\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} = \left[\operatorname{Ln} \left(\frac{x-7}{x+2} \right)^2 \right]_8^t = \operatorname{Ln} \left(\frac{t-7}{t+2} \right)^2 - \operatorname{Ln} \left(\frac{8-7}{8+2} \right)^2 = \operatorname{Ln} \left(\frac{t-7}{t+2} \right)^2 - \operatorname{Ln} \left(\frac{1}{10} \right)^2 = \operatorname{Ln} \left(\frac{\left(\frac{t-7}{t+2} \right)^2}{\left(\frac{1}{10} \right)^2} \right)$$

$$\int_8^t \frac{18}{x^2-5x-14} = \operatorname{Ln} \left(10 \cdot \frac{t-7}{t+2} \right)^2 = \boxed{\operatorname{Ln} \left(\frac{10t-70}{t+2} \right)^2}$$

PROBLEMA 5

c) Determinar el valor de t mayor que 8 para que $\int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx$ sea igual a $\ln \frac{25}{4}$.

Se iguala el resultado de la integral anterior al resultado propuesto por el enunciado.

$$\int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} = \ln \left(\frac{10t - 70}{t + 2} \right)^2 = \ln \frac{25}{4} \quad \text{Se aplica el principio de equivalencia entre los logaritmos.}$$

$$\left(\frac{10t - 70}{t + 2} \right)^2 = \frac{25}{4} \longrightarrow \frac{10t - 70}{t + 2} = \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \longrightarrow \frac{10t - 70}{t + 2} = \pm \frac{5}{2} \quad \text{Se resuelven las dos ecuaciones resultantes.}$$

$$\frac{10t - 70}{t + 2} = \frac{5}{2} \longrightarrow 20t - 140 = 5t + 10 \longrightarrow 15t = 150 \longrightarrow t = 10$$

$$\frac{10t - 70}{t + 2} = -\frac{5}{2} \longrightarrow 20t - 140 = -5t - 10 \longrightarrow 25t = 130 \longrightarrow t = \frac{26}{5} = 5'2$$

Solución no válida.

Solución: El valor de t es 10.

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2022



Problema 6

Problema de optimización

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



PAU Junio 2022
Problema 6



PAU Julio 2021
Problema 6



PAU Junio 2021
Problema 6



PAU Septiembre 2020
Problema 6



PAU Julio 2020
Problema 6



PAU Julio 2019
Problema B3



PAU Junio 2019
Problema B3

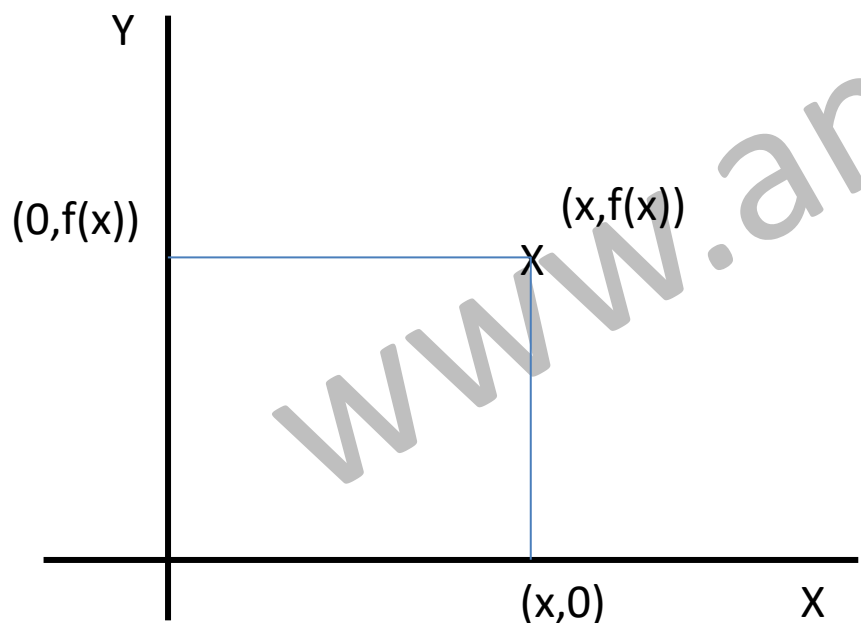
PROBLEMA 6

Problema 6. Considerar la función $f(x) = e^{-x^2}$ para los valores positivos de x . Por cada punto $M = (x, f(x))$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes de coordenadas, OX y OY . Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

- a) Determinar el área del rectángulo en función de x .
- b) Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área.

Solución:

Se hace un esquema de la situación planteada por el enunciado. Veremos que hay un rectángulo con vértices: $(0,0)$; $(x,0)$; $(0,f(x))$ y $(x,f(x))$. Tened en cuenta que no es necesario representar gráficamente la función.



El área del rectángulo se puede expresar como:

$$A(x) = x \cdot f(x) = x \cdot e^{-x^2}; x > 0$$

PROBLEMA 6

b) Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área.

Se debe calcular el máximo de la función obtenida en el apartado a). $A(x) = x \cdot e^{-x^2}; x > 0$

Se calcula la derivada. $A'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2)$

Se iguala a cero la derivada y se resuelve la ecuación. $e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} e^{-x^2} = 0 & \text{No tiene solución.} \\ 1 - 2x^2 = 0 \end{cases}$

$$1 - 2x^2 = 0 \longrightarrow x = \pm \sqrt{\frac{1}{2}} \xrightarrow{x > 0} x = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Comprobamos que el valor obtenido de x proporciona el máximo valor del área. Para ello aplicaré el criterio de la segunda derivada.

Se calcula la derivada segunda. $A''(x) = -2x \cdot e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2) + e^{-x^2} \cdot (-4x) = -2x \cdot e^{-x^2} \cdot (3 - 2x^2)$

Se sustituye en la segunda derivada el valor crítico de x :

$$A''\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot \left(3 - 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2\right) = -2 \cdot e^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2} < 0$$

Lo cual implica que ese valor de x es el que maximiza el área del rectángulo.

PROBLEMA 6

b) Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área.

Para calcular el área máxima, se debe sustituir en la función el valor obtenido.

NOTA: En lugar del criterio de la segunda deriva, podríamos haber hecho un estudio de signos de la primera derivada.

$$A\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = \frac{e^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2}}{2} \text{ unidades de área} \approx 0.4289 \text{ unidades de área}$$

Para calcular la coordenada y del punto M , se debe sustituir en la función $f(x)$.

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} = e^{-\frac{1}{2}}$$

Las coordenadas del punto M que maximizan el área del rectángulo son:

$$M = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, e^{-\frac{1}{2}} \right)$$

El área del rectángulo de área máxima es:

$$\frac{e^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2}}{2} \text{ unidades de área}$$