Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II
Julio 2022

Problema 2
Álgebra matricial

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

En mi página web podrás encontrar muchos más ejercicios de este tema

angelcuesta.com

Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este misma canal.

ÁNGEL CUESTA

Tu profesor en la red

SUSCRÍBETE

Problema 2

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$

a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4.

c) Calcular $\mathrm{Det}(A^{-50})$ cuando $a^2 - b^2 \neq 0$.

Solución: El producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad. $A \cdot A^{-1} = I$

Calculo el producto de una matriz por su inversa es la matriz identidad.

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)\cdot 1 + 1 \cdot 0 & (a+b)\cdot(-1) +\cdot 1 \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + (a-b)\cdot 0 & 0 \cdot (-1) + (a-b)\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & -a-b+\cdot 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$$

Se iguala el resultado a la matriz identidad. $\begin{pmatrix} a+b & -a-b+1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Dos matrices son iguales si sus elementos también los son, por eso los términos a_{ij} de cada matriz.

$$\begin{cases} a+b=1 \\ -a-b+1=0 \\ a-b=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ a-b=1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} a=1 \\ b=0 \end{cases}$

Problema 2

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$

b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4.

Sustituyendo a=1 y b=0 en la matriz A, esta quedaría escrita de la siguiente forma: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculo en primer lugar A^2. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 1\cdot 0 & 1\cdot 1 +\cdot 1\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Calculo A^3. $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 1 +\cdot 2\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}}$

Calculo A^4. $A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 3\cdot 0 & 1\cdot 1 +\cdot 3\cdot 1 \\ 0\cdot 1 + 1\cdot 0 & 0\cdot 1 + 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}}$

Problema 2

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$

c) Calcular $\mathrm{Det}(A^{-50})$ cuando $a^2 - b^2 \neq 0$.

Antes de comenzar, se debe aclarar una cuestión de nomenclatura del ejercicio. A^{-50}, es la forma de expresar la matriz inversa de A^{50}. $\boldsymbol{A^{-50}} = \left(\boldsymbol{A^{50}}\right)^{\boldsymbol{-1}}$

Se aplican las propiedades de los determinantes. $\mathrm{Det}(A^{-50}) = Det[(A^{50})^{-1}] = \dfrac{1}{Det(A^{50})} = \dfrac{1}{(Det(A))^{50}}$

Propiedad de la matriz inversa: $Det(A^{-1}) = \dfrac{1}{Det(A)}$

Propiedad de la potencia de una matriz: $Det(A^n) = (Det(A))^n$

Calculo el determinante de A: $Det(A) = \begin{vmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

Se calcula el determinante pedido: $\mathrm{Det}(A^{-50}) = \dfrac{1}{(Det(A))^{50}} = \dfrac{1}{(a^2-b^2)^{50}}$

Solución: $\boxed{\mathrm{Det}(A^{-50}) = \dfrac{1}{(a^2-b^2)^{50}}}$