Selectividad Comunidad Valenciana

Matemáticas II

Julio 2022

Problema 3

Geometría

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

Teoría de Matrices y Geometría

PAU Julio 2021 Problema 2

PAU Julio 2021 Problema 5

PAU Junio 2021 Problema 2

PAU Junio 2021 Problema 5

PAU Septiembre 2020 Problema 2

PAU Septiembre 2020 Problema 5

PAU Julio 2020 Problema 2

En mi página web podrás encontrar muchos más ejercicios de este tema angelcuesta.com

PROBLEMA 3

Dados los puntos A=(2,0,0) y B=(0,1,0), y la recta $s: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z$

a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B.

b) Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r.

c) Calcular la distancia del punto A a la recta s.

Solución: Escribiré la recta en distintas formas con fines pedagógicos.

1) Calculo el vector director. $\vec{v} = B - A = (0,1,0) - (2,0,0) = (-2,1,0)$

2) Escribo la ecuación vectorial: $r:\ (x,y,z) = (2,0,0) + \lambda \cdot (-2,1,0)$

3) Escribo las ecuaciones paramétricas: $r: = \begin{cases} x = 2 - 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases}$

4) Escribo la ecuación continua: $r: \dfrac{x-2}{-2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{0}$

5) Escribo la ecuación de la recta como intersección de dos planos a partir de las ecuaciones paramétricas, ya que tengo una despejada. $r: = \begin{cases} x = 2 - 2y \\ z = 0 \end{cases} \longrightarrow r: = \begin{cases} x + 2y = 2 \\ z = 0 \end{cases}$

PROBLEMA 3

Dadas los puntos A=(2,0,0) y B=(0,1,0), y la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$

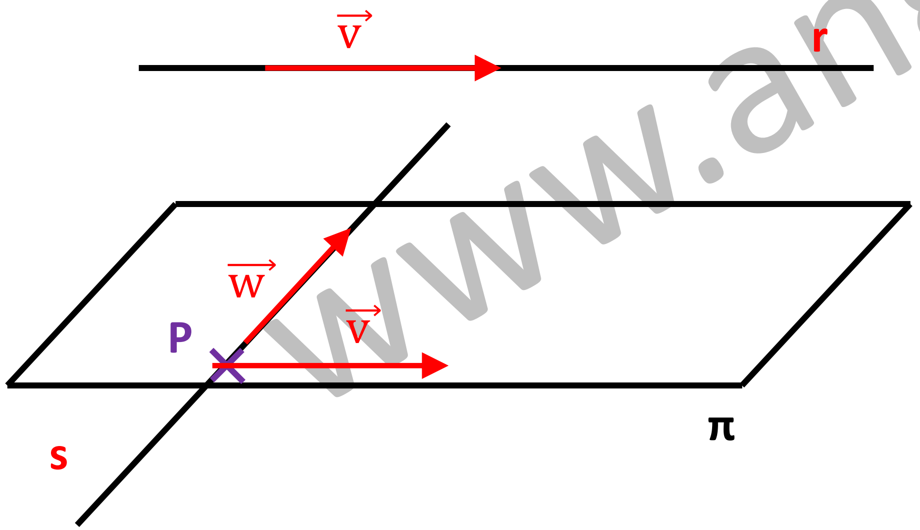
b) Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r.

Recordamos el vector director de r: $\vec{v} = B - A = (0,1,0) - (2,0,0) = (-2,1,0)$

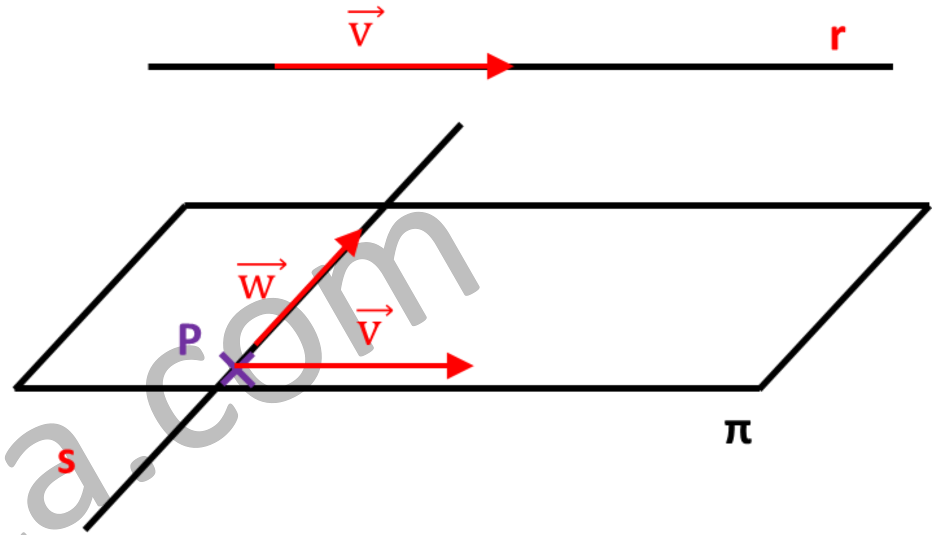
Hacemos un esquema de la situación para entender mejor los pasos que haremos a continuación.

Siendo el vector director de s: $\vec{w} = (2,3,1)$

Además de los dos vectores directores del plano, necesitamos un punto del plano. Puesto que la recta s está incluida en el plano, podemos tomar un punto de la recta s. P=(1,1,0).



PROBLEMA 3



Dadas los puntos A=(2,0,0) y B=(0,1,0), y la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$

b) Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r.

Calculo la ecuación general (o implícita) del plano mediante determinantes.

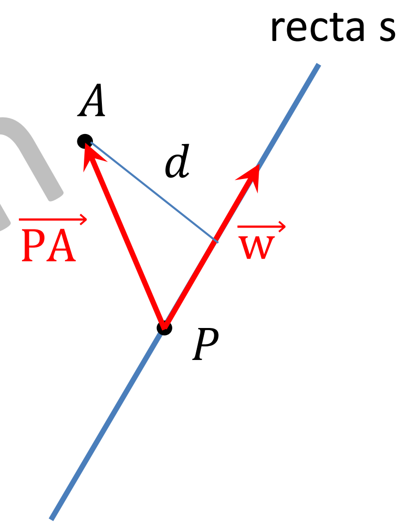
Recordamos datos: $\vec{v} = (-2,1,0); \vec{w} = (2,3,1)\ y\ P = (1,1,0)$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow x + 2y - 8z - 3 = 0$$

La ecuación del plano es: $\boldsymbol{\pi: x + 2y - 8z - 3 = 0}$

PROBLEMA 3

Dadas los puntos A=(2,0,0) y B=(0,1,0), y la recta $s: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{3} = z$



Esquema orientativo

c) Calcular la distancia del punto A a la recta s.

Se calcula como la distancia del punto A a su proyección ortogonal sobre la recta, ya que estamos calculando la mínima distancia del punto a la recta.

El método más directo es aplicar la fórmula que nos da la distancia de un punto a una recta.

$$d_{As} = \frac{|\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{w}|}{|\overrightarrow{w}|}$$

Siendo, $\overrightarrow{w}$ el vector director de la recta s
P un punto de la recta s
A el punto al cual se calcula la distancia desde s
$\overrightarrow{PA}$ el vector que va desde P hasta A.

Siendo el punto P de la recta s: $P = (1,1,0)$ Y el vector director: $\vec{w} = (2,3,1)$

Calculo el vector $\overrightarrow{PA}$: $\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP} = (2,0,0) - (1,1,0) = (1,-1,0)$

Calculo $\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{w}$: $\overrightarrow{PA} \times \overrightarrow{w} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{i} + 3\vec{k} - (-2\vec{k} + \vec{j}) = -\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k}$

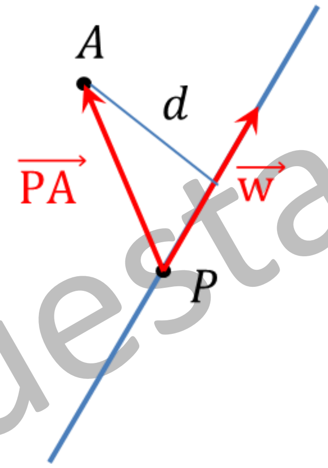
PROBLEMA 3

Se calcula el módulo de $\overrightarrow{PA} \times \vec{w}$:

$$\left|\overrightarrow{PA} \times \vec{w}\right| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2+5^2} = \sqrt{27} = 3 \cdot \sqrt{3}$$

Se calcula el módulo de $\vec{w}$:

$$|\vec{w}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$



Esquema orientativo

Se aplica la fórmula y se calcula la distancia.

$$d_{Br} = \frac{\left|\overrightarrow{PA} \times \vec{w}\right|}{|\vec{w}|} = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{14}} = \frac{3 \cdot \sqrt{42}}{14} \approx \mathbf{1'389\ u.l.}$$

La distancia del punto A a la recta s es $\boldsymbol{\frac{3 \cdot \sqrt{42}}{14}}$ $\boldsymbol{u.l.}$ que son $\mathbf{1'389\ u.l}$ aproximadamente.