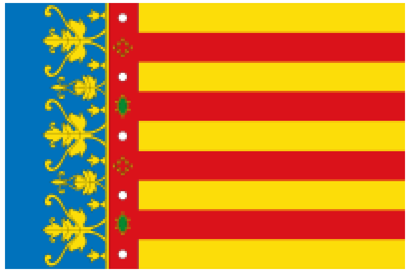
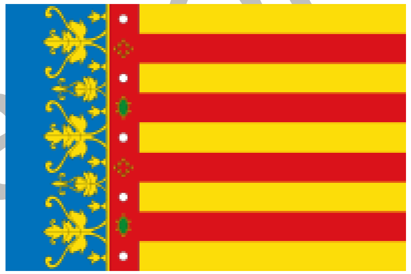
Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Julio 2022



Problema 6
Problema de optimización

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR

PAU Junio 2022
Problema 6

PAU Julio 2021
Problema 6

PAU Junio 2021
Problema 6

PAU Septiembre 2020
Problema 6

PAU Julio 2020
Problema 6

PAU Julio 2019
Problema B3

PAU Junio 2019
Problema B3

PROBLEMA 6

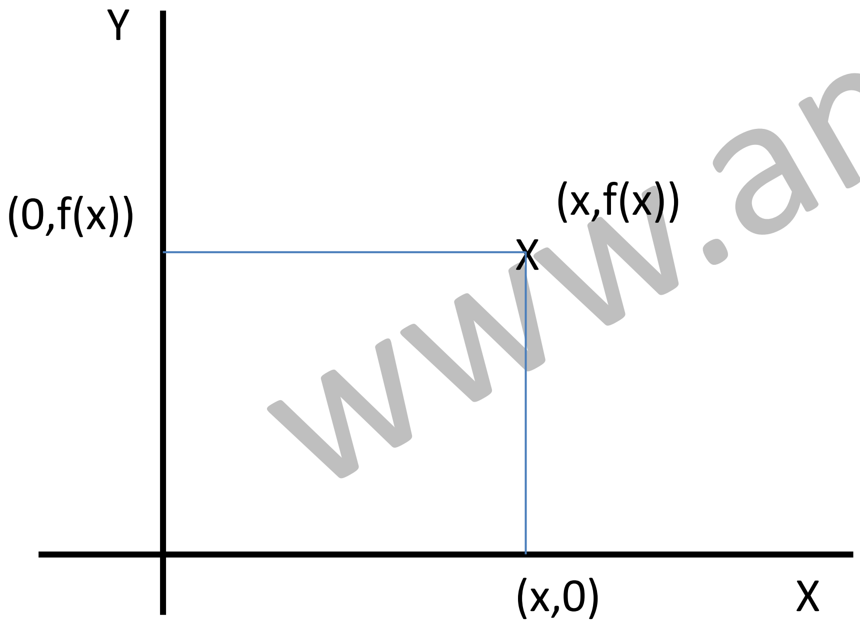
Problema 6. Considerar la función $f(x) = e^{-x^2}$ para los valores positivos de x. Por cada punto $M = (x, f(x))$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes de coordenadas, OX y OY. Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

a) Determinar el área del rectángulo en función de x.

b) Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área.

Solución:

Se hace un esquema de la situación planteada por el enunciado. Veremos que hay un rectángulo con vértices: (0,0); (x,0); (0,f(x)) y (x,f(x)). Tened en cuenta que no es necesario representar gráficamente la función.



El área del rectángulo se puede expresar como:

$$\boxed{A(x) = x \cdot f(x) = x \cdot e^{-x^2}; x > 0}$$

PROBLEMA 6

b) Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área.

Se debe calcular el máximo de la función obtenida en el apartado a). $A(x) = x \cdot e^{-x^2}; x > 0$

Se calcula la derivada. $A'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + x \cdot (-2x) \cdot e^{-x^2} = e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2)$

Se iguala a cero la derivada y se resuelve la ecuación. $e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2) = 0 \longrightarrow \begin{cases} e^{-x^2} = 0 & \text{No tiene solución.} \\ 1 - 2x^2 = 0 \end{cases}$

$$1 - 2x^2 = 0 \longrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \xrightarrow{x > 0} \boldsymbol{x = \sqrt{\frac{1}{2}}}$$

Comprobamos que el valor obtenido de x proporciona el máximo valor del área. Para ello aplicaré el criterio de la segunda derivada.

Se calcula la derivada segunda. $A''(x) = -2x \cdot e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2) + e^{-x^2} \cdot (-4x) = -2x \cdot e^{-x^2} \cdot (3 - 2x^2)$

Se sustituye en la segunda derivada el valor crítico de x:

$$A''\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2} \cdot \left(3 - 2 \cdot \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2\right) = \boldsymbol{-2 \cdot e^{-\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{2} < 0}$$

Lo cual implica que ese valor de x es el que maximiza el área del rectángulo.

PROBLEMA 6

b) Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área.

Para calcular el área máxima, se debe sustituir en la función el valor obtenido.
NOTA: En lugar del criterio de la segunda deriva, podríamos haber hecho un estudio de signos de la primera derivada.

$$A\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=\sqrt{\frac{1}{2}}\cdot e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=\frac{\boldsymbol{e^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2}}}{\boldsymbol{2}}\ \boldsymbol{unidades\ de\ área}\approx 04289\ unidades\ de\ área$$

Para calcular la coordenada y del punto M, se debe sustituir en la función f(x).

$$f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)=e^{-\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2}=\boldsymbol{e^{-\frac{1}{2}}}$$

Las coordenadas del punto M que maximizan el área del rectángulo son: $\boxed{\boldsymbol{M=\left(\sqrt{\frac{1}{2}},e^{-\frac{1}{2}}\right)}}$

El área del rectángulo de área máxima es: $\boxed{\boldsymbol{\frac{e^{-\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{2}}{2}\ unidades\ de\ área}}$