

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

JULIO 2022

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y = 1 \\ x + z = 1 \\ x + ay + (a - 1)z = a \end{cases}.$$

- a) Discutir el sistema en función del parámetro real a . (5 puntos)
- b) Encontrar todas las soluciones del sistema cuando este sea compatible. (5 puntos)

Problema 2. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$:

- a) Calcular los valores de los parámetros a y b para que se cumpla $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (4 puntos)
- b) Para los valores a y b obtenidos en el apartado anterior, calcular A^3 y A^4 . (3 puntos)
- c) Calcular $\det(A^{-50})$ cuando $a^2 - b^2 \neq 0$. (3 puntos)

Problema 3. Dados los puntos $A = (2,0,0)$ y $B = (0,1,0)$, y la recta $s: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{3} = z$:

- a) Hallar la ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B . (2 puntos)
- b) Determinar la ecuación implícita del plano que contiene a la recta s y es paralelo a la recta r . (4 puntos)
- c) Calcular la distancia del punto A a la recta s . (4 puntos)

Problema 4. Dados los puntos $A = (2,1,-2)$ y $B = (3,2,3)$, y el plano π definido por $2x + 2y + z = 3$, obtener:

- a) El punto de corte C entre el plano π y la recta perpendicular a π que pasa por B . (5 puntos)
- b) El área del triángulo cuyos vértices son A, B y C . (5 puntos)

Problema 5.

- a) Calcular, indicando todos los pasos, la siguiente integral indefinida: (5 puntos)

$$\int \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx.$$

- b) Determinar, en función de t , el valor $\int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx$. (2 puntos)
- c) Determinar el valor de t mayor que 8 para que $\int_8^t \frac{18}{x^2 - 5x - 14} dx$ sea igual a $\ln \frac{25}{4}$. (3 puntos)

Problema 6. Considerar la función $f(x) = e^{-x^2}$ para los valores positivos de x . Por cada punto $M = (x, f(x))$ de la gráfica de f se trazan dos rectas paralelas a los ejes de coordenadas, OX y OY . Estas dos rectas, junto con los ejes de coordenadas, definen un rectángulo.

- a) Determinar el área del rectángulo en función de x . (3 puntos)
- b) Encontrar el punto M que proporciona mayor área y calcular esta área. (7 puntos)