

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2023



Problema 1

Álgebra matricial/Sistemas de ecuaciones

Problema 1

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real:

- a) Discutir el sistema en función del parámetro a .
- b) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

Solución:

Se operan A y X. $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x + (a+1) \cdot y + 1 \cdot z \\ 1 \cdot x + a \cdot y + 2 \cdot z \\ 1 \cdot x + 1 \cdot y + (a+2) \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + (a+1)y + z \\ x + ay + 2z \\ x + y + (a+2)z \end{pmatrix}$

Se obtiene la igualdad: $\begin{pmatrix} 2x + (a+1)y + z \\ x + ay + 2z \\ x + y + (a+2)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Para que dos matrices sean iguales, deben serlo todos sus términos a_{ij} .

$$\begin{cases} 2x + (a+1)y + z = -1 \\ x + ay + 2z = 1 \\ x + y + (a+2)z = 2 \end{cases} \quad \text{Se discute el sistema aplicando el teorema de Rouché.}$$

Problema 1

a) Discutir el sistema en función del parámetro a .

$$\begin{cases} 2x + (a+1)y + z = -1 \\ x + ay + 2z = 1 \\ x + y + (a+2)z = 2 \end{cases}$$

Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculo el rango de A en función de a utilizando su determinante. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{vmatrix} = a^2 + 2a - 3$

Se iguala a cero y se resuelve la ecuación de segundo grado. $a^2 + 2a - 3 = 0 \longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \end{cases}$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -3$ entonces $|A| \neq 0$, **Ran(A) = 3** $\longrightarrow$ **Ran(A*) = 3**

Si $a = 1$ o $a = -3$ entonces $|A| = 0$, **Ran(A) < 3** $\longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A* sustituyendo los valores de a en las matrices.

En esta ocasión, calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A* utilizando el método de Gauss para los valores concretos de a . También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

Problema 1

$$\text{Si } a = 1 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=2F_2-F_1 \\ F_3=2F_3-F_1}]{F_2=2F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{¡ OJO !}}]{F_3=3F_3-5F_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A

$$\begin{cases} 2x + (a+1)y + z = -1 \\ x + ay + 2z = 1 \\ x + y + (a+2)z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 2 \end{pmatrix}$$

Al finalizar el método de Gauss se observa que A y A* tienen dos filas linealmente independientes. Para $a = 1$, **Ran(A) = 2 y Ran(A*) = 2**.

$$\text{Si } a = -3 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3=2F_3-F_1}]{F_2=2F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3+F_2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

A

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A* tiene las tres filas linealmente independientes. Para $a = -3$, **Ran(A) = 2 y Ran(A*) = 3**.

Problema 1

Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado a).

	Ran(A)	Ran(A*)	Nº incógnitas	Tipo de Sistema	Número de soluciones
Si $a \neq 1$ y $a \neq -3$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $a = 1$	2	2	3	S.C.I.	Infinitas
Si $a = -3$	2	3	3	S.I.	Sin solución

$$\begin{cases} 2x + (a+1)y + z = -1 \\ x + ay + 2z = 1 \\ x + y + (a+2)z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

Para resolver el sistema de ecuaciones aprovecharemos la matriz escalonada obtenida en el apartado anterior para $a=1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = -1 \\ 3z = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = -1 \\ z = 1; y = \lambda \end{cases} \longrightarrow 2x + 2\lambda + 1 = -1 \longrightarrow x = -\lambda - 1$$

La solución del sistema para $a = 1$ es:

$$\boxed{\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}}$$

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2023



Problema 2

Álgebra matricial

©Angel Cuesta Arza

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



ÁNGEL CUESTA

Tu profesor en la red

SUSCRÍBETE

Problema 2

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener:

- a) La matriz $M = (A - \alpha \cdot I)^2$, donde α es un parámetro real.
- b) El valor de α , si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula.

Solución: Se calcula en primer lugar la matriz, $A - \alpha \cdot I$

$$A - \alpha \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3 - \alpha \end{pmatrix}$$

Se calcula en segundo lugar la matriz $M = (A - \alpha \cdot I)^2$, multiplicando la matriz obtenida anteriormente por sí misma.

$$M = (A - \alpha \cdot I)^2 = (A - \alpha \cdot I) \cdot (A - \alpha \cdot I) = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3 - \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3 - \alpha \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} (-\alpha) \cdot (-\alpha) + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 & (-\alpha) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-\alpha) + (-2) \cdot 1 & (-\alpha) \cdot (-2) + (-1) \cdot (-2) + (-2) \cdot (3 - \alpha) \\ (-1) \cdot (-\alpha) + (-\alpha) \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + (-\alpha) \cdot (-\alpha) + (-2) \cdot 1 & (-1) \cdot (-2) + (-\alpha) \cdot (-2) + (-2) \cdot (3 - \alpha) \\ 1 \cdot (-\alpha) + 1 \cdot (-1) + (3 - \alpha) \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-\alpha) + (3 - \alpha) \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2) + (3 - \alpha) \cdot (3 - \alpha) \end{pmatrix}$$

Problema 2

Continúo operando la matriz obtenida anteriormente.

$$M = \begin{pmatrix} (-\alpha) \cdot (-\alpha) + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 & (-\alpha) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-\alpha) + (-2) \cdot 1 & (-\alpha) \cdot (-2) + (-1) \cdot (-2) + (-2) \cdot (3 - \alpha) \\ (-1) \cdot (-\alpha) + (-\alpha) \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + (-\alpha) \cdot (-\alpha) + (-2) \cdot 1 & (-1) \cdot (-2) + (-\alpha) \cdot (-2) + (-2) \cdot (3 - \alpha) \\ 1 \cdot (-\alpha) + 1 \cdot (-1) + (3 - \alpha) \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-\alpha) + (3 - \alpha) \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2) + (3 - \alpha) \cdot (3 - \alpha) \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \alpha^2 + 1 - 2 & \alpha + \alpha - 2 & 2\alpha + 2 - 6 + 2\alpha \\ \alpha + \alpha - 2 & 1 + \alpha^2 - 2 & 2 + 2\alpha - 6 + 2\alpha \\ -\alpha - 1 + 3 - \alpha & -1 - \alpha + 3 - \alpha & -2 - 2 + 9 - 6\alpha + \alpha^2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & 2\alpha - 2 & 4\alpha - 4 \\ 2\alpha - 2 & \alpha^2 - 1 & 4\alpha - 4 \\ -2\alpha + 2 & -2\alpha + 2 & \alpha^2 - 6\alpha + 5 \end{pmatrix}}$$

Problema 2

b) El valor de α , si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula.

Recordamos que: $M = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & 2\alpha - 2 & 4\alpha - 4 \\ 2\alpha - 2 & \alpha^2 - 1 & 4\alpha - 4 \\ -2\alpha + 2 & -2\alpha + 2 & \alpha^2 - 6\alpha + 5 \end{pmatrix}$

Para que M sea igual a la matriz nula, todos y cada uno de sus elementos a_{ij} deben ser nulos. Por consiguiente:

$$a_{11} = \alpha^2 - 1 = 0 \rightarrow \alpha = \pm 1 \quad a_{12} = 2\alpha - 2 = 0 \rightarrow \alpha = 1 \quad a_{13} = 4\alpha - 4 = 0 \rightarrow \alpha = 1$$

$$a_{21} = 2\alpha - 2 = 0 \rightarrow \alpha = 1 \quad a_{22} = \alpha^2 - 1 = 0 \rightarrow \alpha = \pm 1 \quad a_{23} = 4\alpha - 4 = 0 \rightarrow \alpha = 1$$

$$a_{31} = -2\alpha + 2 = 0 \rightarrow \alpha = 1 \quad a_{32} = -2\alpha + 2 = 0 \rightarrow \alpha = 1 \quad a_{33} = \alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 5 \end{cases}$$

Se observa que hay una solución común para los nueve elementos de la matriz.

Solución: $\alpha = 1$

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2023



Problema 3

Geometría

©Angel Cuesta Arza

REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



PROBLEMA 3

Dados los puntos $A = (2, -1, 0)$, $B = (1, 2, 3)$ y $C = (-1, 0, 0)$

- a) Hallar la ecuación implícita de la recta r que contiene a los puntos A y B .
- b) Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta anterior r y que contiene al punto C .
- c) Calcular la distancia del punto A al plano π .

Solución: 1) Calculo el vector director. $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = B - A = (1, 2, 3) - (2, -1, 0) = (-1, 3, 3)$

2) Escribo la ecuación vectorial: $r: (x, y, z) = (1, 2, 3) + \lambda \cdot (-1, 3, 3)$

3) Escribo las ecuaciones paramétricas: $r: \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = 2 + 3\lambda \\ z = 3 + 3\lambda \end{cases}$

4) Escribo la ecuación continua: $r: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{3}$

5) Escribo la ecuación de la recta en forma implícita a partir de la ecuación continua:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} \\ \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{3} \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 3x - 3 = -y + 2 \\ y - 2 = z - 3 \end{cases} \longrightarrow \boxed{r: \begin{cases} 3x + y - 5 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}}$$

PROBLEMA 3

Dados los puntos $A = (2, -1, 0)$, $B = (1, 2, 3)$ y $C = (-1, 0, 0)$

b) Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta anterior r y que contiene al punto C .

Recordamos que el vector director de la recta r es: $\vec{v} = (-1, 3, 3)$

Este vector es también el vector normal del plano pedido. $\vec{n} = (-1, 3, 3)$

Calculo la ecuación en función del vector normal, puesto que dispongo de un vector normal al plano y un punto del mismo.

$$-1 \cdot (x - (-1)) + 3 \cdot (y - 0) + 3 \cdot (z - 0) = 0 \longrightarrow -x + 3y + 3z - 1 = 0$$

$$\pi: -x + 3y + 3z - 1 = 0$$

c) Calcular la distancia del punto A al plano π .

Se aplica la fórmula correspondiente. $d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$d = \frac{|(-1) \cdot 2 + 3 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 3^2}} = \frac{|-6|}{\sqrt{19}} = \frac{6 \cdot \sqrt{19}}{19} \approx 1,3765$$

La distancia es: $\frac{6 \cdot \sqrt{19}}{19}$ unidades de longitud.

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2023



Problema 4

Geometría

REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



PROBLEMA 4

Dada la recta $r: (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, -1, 2)$, y el plano $\pi: 5x + my + z = 2$

a) Obtener la posición relativa de r y π en función de m .

b) Para $m = 1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π .

Solución:

Para comprobar la posición relativa podemos utilizar las propiedades del producto escalar, ya que el ángulo que formen el vector director de la recta y el normal del plano, nos darán información acerca de la posición relativa de ambos.

Necesitaremos un punto y el vector director de la recta. $P = (1, 1, 0); \vec{u} = (-1, -1, 2)$

Necesitaremos conocer el vector normal del plano. $\vec{n} = (5, m, 1)$

Se hace el producto escalar de los dos vectores. Si es distinto de CERO, los vectores no son perpendiculares y la recta y el plano son secantes. Si es igual a CERO, recta y plano son paralelos o la recta está contenida en el plano.

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = (-1, -1, 2) \cdot (5, m, 1) = -5 - m + 2 = 0 \longrightarrow m = -3$$

Si $m \neq -3$ la recta y el plano son secantes.

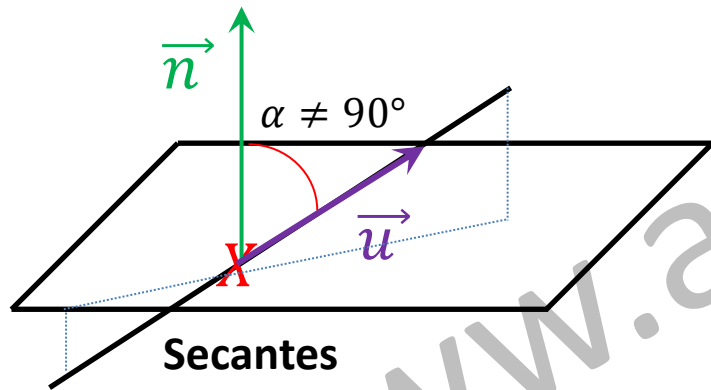
Si $m = -3$ debemos comprobar si la recta y el plano son paralelos o si la recta está contenida en el plano. Se hace a continuación.

PROBLEMA 4

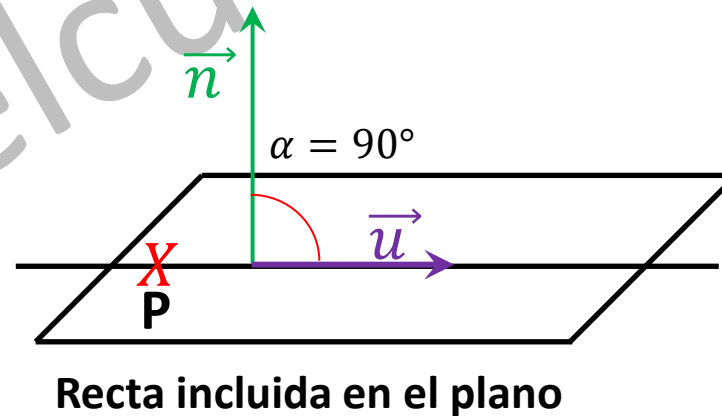
Sustituyo el punto P en la ecuación del plano para comprobar si para el valor de $m = -3$, $P = (1,1,0)$ pertenece al plano. En caso afirmativo, la recta estará incluida en el plano.

$$5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 0 = 2 \longrightarrow 2 = 2$$

Si $m \neq -3$ la recta y el plano son secantes.



Si $m = -3$ la recta está contenida en el plano.



$$r: (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, -1, 2)$$

$$P = (1, 1, 0)$$

$$\pi: 5x + my + z = 2$$

PROBLEMA 4

b) Para $m = 1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π .

$$r: (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, -1, 2)$$

$$P = (1, 1, 0); \vec{u} = (-1, -1, 2)$$

$$\pi: 5x + y + z = 2$$

Hacemos un esquema de la situación e indicamos los pasos que seguiremos:

1) El vector director de la recta, debe ser uno de los vectores directores del plano π' , ya que la recta está contenida en dicho plano. $\vec{u} = \vec{v} = (-1, -1, 2)$

2) El vector normal del plano π , es director del plano π' , ya que ambos son perpendiculares. $\vec{n} = \vec{w} = (5, 1, 1)$

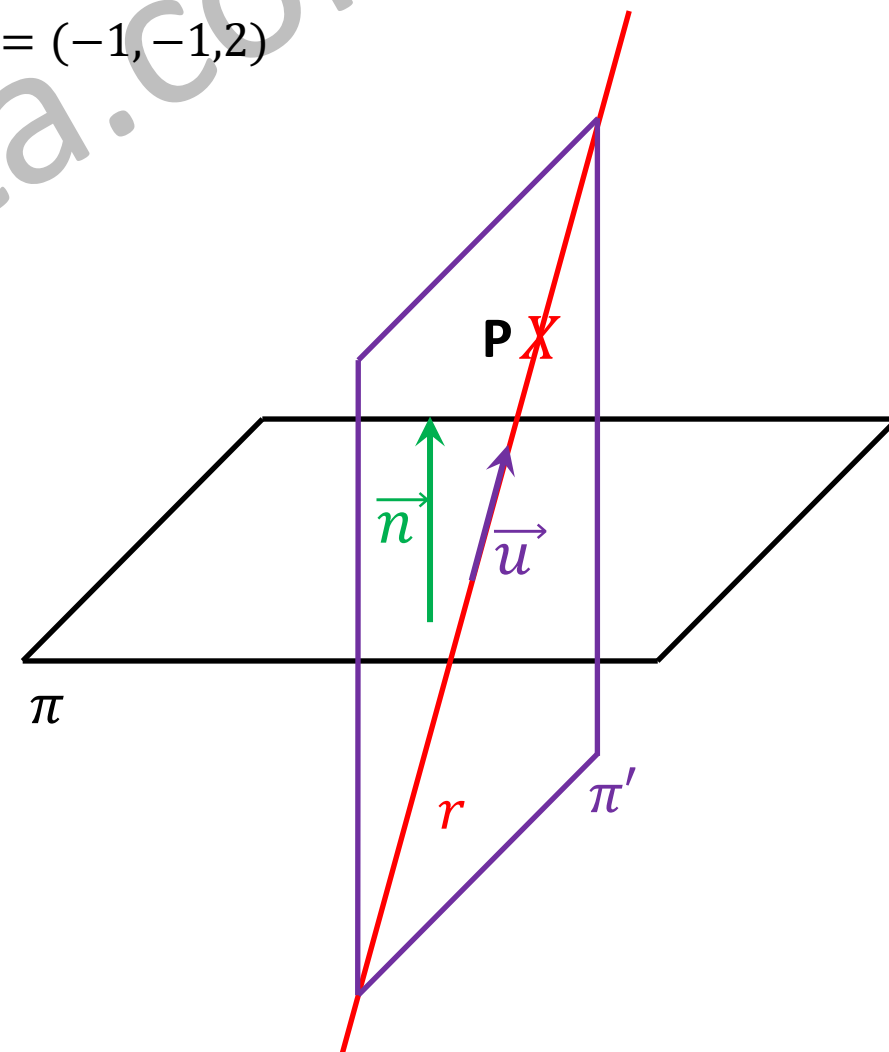
3) Puesto que el plano pasa por P y tiene por vectores directores $\vec{v}$ y $\vec{w}$, podemos obtener la ecuación del plano con el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & z - z_0 & y - y_0 \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = 0 \longrightarrow \begin{vmatrix} x - 1 & y - 1 & z \\ -1 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-(x - 1) + 10 \cdot (y - 1) - z - [-5z - (y - 1) + 2 \cdot (x - 1)] = 0$$

$$-3x + 11y + 4z - 8 = 0$$

La ecuación del plano es $\pi': -3x + 11y + 4z - 8 = 0$



Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2023



Problema 5

Análisis de funciones e integrales

Problema 5

Consideremos la función $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$

- a) Comprobar que $x = -1/2$ es una discontinuidad evitable.
- b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- c) Obtener $\int f(x) dx$. (Aclaración mía: La primitiva de la función $f(x)$.)

Solución:

Para que la discontinuidad de $f(x)$ sea evitable debe existir el límite cuando x tiende a $-1/2$ y dicho valor debe ser diferente del valor de la imagen de la función en $x = -1/2$.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{no existe la imagen de } f(x) \text{ en } x = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{0}{0} = \text{INDET}$$

Para resolver la indeterminación se deben factorizar los polinomios.

Problema 5

Consideremos la función $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$

a) **Comprobar que $x = -1/2$ es una discontinuidad evitable.** Se factorizan los polinomios para resolver la indeterminación.

Puesto que sé que $-1/2$ es raíz de ambos polinomios, aplico la regla de Ruffini para factorizar.

Numerador: $P(x) = -2x^2 + x + 1$

Denominador: $Q(x) = 2x^2 + 5x + 2$

$$\begin{array}{r|rrr} -1/2 & -2 & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 \\ \hline & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} -1/2 & 2 & 5 & 2 \\ & & -1 & -2 \\ \hline & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (-2x + 2)$$

$$Q(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (2x + 4)$$

Se calcula el límite: $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (-2x + 2)}{\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{-2x + 2}{2x + 4} = \frac{-2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4} = \frac{3}{3} = 1$

Problema 5

Consideremos la función $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$

a) Comprobar que $x = -1/2$ es una discontinuidad evitable. Se analiza la continuidad de la función.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{no existe la imagen de } f(x) \text{ en } x = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2} = 1 \rightarrow \text{existe el límite cuando } x \text{ tiende a } -\frac{1}{2}$$

Puesto que existe el límite, pero no la imagen, podemos afirmar que **$f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x = -1/2$.**

Problema 5

Consideremos la función $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$

b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución: Se calcula el dominio de la función. Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$$2x^2 + 5x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1/2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \text{ lo cual implica que el Dominio es: } \text{Dom } f(x) = \mathbf{R - \{-2, -1/2\}}$$

Se calcula la derivada de la función para estudiar la monotonía. Se simplifica primero y se deriva después.

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (-2x + 2)}{\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (2x + 4)} \rightarrow g(x) = \frac{-2x + 2}{2x + 4} = \frac{2 \cdot (-x + 1)}{2 \cdot (x + 2)} = \frac{-x + 1}{x + 2}$$

$$f'(x) = g'(x) = \frac{-1 \cdot (x + 2) - (-x + 1) \cdot 1}{(x + 2)^2} = \frac{-3}{(x + 2)^2}$$

NOTA IMPORTANTE: Aunque la función original y la simplificada no son exactamente las mismas (la original tiene una discontinuidad evitable en $x = -1/2$ y la simplificada no), su monotonía es la misma excepto en dicho valor de x .

Problema 5

$$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2}$$

Igualamos la derivada a cero:

$$\frac{-3}{(x+2)^2} = 0 \longrightarrow -3 = 0 \quad \text{No existe ningún valor que anule la derivada}$$

Se hace el estudio de signos de $f(x)$, teniendo en cuenta los valores de x que están fuera del dominio.

	$-\infty$	-2	$-1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	—	—	—	
$f(x)$				

$f(x)$ es **decreciente** en $\mathbb{R} - \{-2, -1/2\}$

Problema 5

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$$

c) Obtener $\int f(x) dx$. (Aclaración mía: La primitiva de la función $f(x)$.)

Al igual que en el apartado b), se puede utilizar la expresión simplificada de $f(x)$. Aunque no sean las mismas funciones por los motivos expuestos anteriormente, la expresión de su función primitiva será la misma.

$$\int f(x) dx = \int \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2} dx = \int \frac{-x + 1}{x + 2} dx = - \int \frac{x - 1}{x + 2} dx = - \int \frac{x - 1 + 3 - 3}{x + 2} dx = - \int \frac{x + 2 - 3}{x + 2} dx$$

$$\int f(x) dx = - \left(\int \frac{x + 2}{x + 2} dx - \int \frac{3}{x + 2} dx \right) = - \left(\int 1 dx - \int \frac{3}{x + 2} dx \right) = -(x - 3 \cdot \ln|x + 2|)$$

$$\int f(x) dx = -x + 3 \cdot \ln|x + 2| + C$$

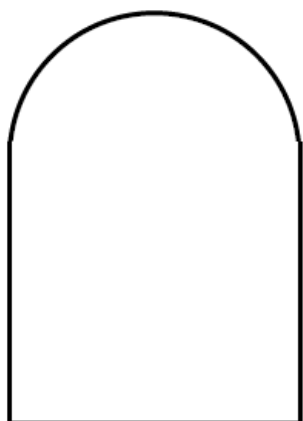
NOTA: se podría haber resuelto la integral dividiendo en primer lugar y expresando el cociente en función del cociente, el resto y el divisor.

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2023



Problema 6

Problema de optimización

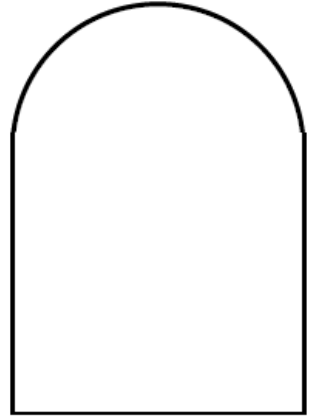


Aprende a resolver problemas
de optimización de funciones.
Teoría y ejercicios.



PROBLEMA 6

Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo tal y como se indica en la siguiente figura. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros:



- a) Calcular el área de la ventana en función de su anchura x .
- b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz.
- c) Calcular el valor de dicha área máxima.

Solución: Se definen las variables del problema: x =anchura del rectángulo; y =altura del rectángulo.

Se expresa el área de la figura en función de x e y en primer lugar. $A = A_{\text{rectángulo}} + A_{\text{Semicírculo}} = x \cdot y + \frac{\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}$

Se plantea una ecuación que relacione las distintas variables del problema. $\text{Perímetro} = x + 2y + \frac{\pi \cdot x}{2} = 20$

Se despeja y de la ecuación y se sustituye en la función de modo que nos quede el área de la ventana en función de x .

$$x + 2y + \frac{\pi \cdot x}{2} = 20 \rightarrow y = \frac{20 - x - \frac{\pi \cdot x}{2}}{2} = 10 - \frac{x}{2} - \frac{\pi \cdot x}{4} = \frac{40 - 2x - \pi \cdot x}{4}$$

$$A(x) = x \cdot y + \frac{\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = x \cdot \left(\frac{40 - 2x - \pi \cdot x}{4}\right) + \frac{\pi \cdot x^2}{8} = \frac{40x - 2x^2 - \pi \cdot x^2}{4} + \frac{\pi \cdot x^2}{8}$$

PROBLEMA 6

a) Calcular el área de la ventana en función de su anchura x .

$$A(x) = \frac{40x - 2x^2 - \pi \cdot x^2}{4} + \frac{\pi \cdot x^2}{8} = \frac{80x - 4x^2 - 2 \cdot \pi \cdot x^2 + \pi \cdot x^2}{8} = \frac{(-4 - \pi) \cdot x^2 + 80x}{8} = \frac{(-4 - \pi)}{8} \cdot x^2 + 10x$$

El dominio de la función se define a partir de las restricciones dadas por el perímetro y por $x > 0$ e $y > 0$ (ya que x e y son longitudes).

$$y = \frac{40 - 2x - \pi \cdot x}{4} > 0 \longrightarrow 40 - 2x - \pi \cdot x > 0 \longrightarrow 2x + \pi \cdot x < 40 \longrightarrow x \cdot (2 + \pi) < 40 \longrightarrow x < \frac{40}{2 + \pi}$$

$$A(x) = \frac{(-4 - \pi)}{8} \cdot x^2 + 10x$$

Siendo el dominio de la función: $0 < x < \frac{40}{2 + \pi}$

PROBLEMA 6

b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz.

Podemos observar que la función área es una función cuadrática, por lo que debemos calcular el máximo de una función cuadrática. El coeficiente del término cuadrático es negativo, lo cual nos indica que el vértice de la función es el máximo.

$$A(x) = \frac{(-4 - \pi)}{8} \cdot x^2 + 10x$$

Bastaría con calcular el vértice de la función utilizando la fórmula habitual de 4º de ESO. Pero como este ejercicio está propuesto en las PAU, lo resolveré utilizando derivadas. Por eso, calculo la derivada de la función A(x).

$$A'(x) = \frac{(-4 - \pi)}{4} \cdot x + 10 \quad \text{Se iguala a cero para obtener el óptimo local.}$$

$$\frac{(-4 - \pi)}{4} \cdot x + 10 = 0 \longrightarrow \frac{(-4 - \pi)}{4} \cdot x = -10 \quad x = \frac{-10}{\frac{(-4 - \pi)}{4}} = \frac{40}{4 + \pi} \approx 5,6$$

Aunque ya hemos justificado que es un máximo, vamos a comprobarlo utilizando el **criterio de la segunda derivada**.

Se calcula la segunda derivada y se sustituye el valor de x obtenido anteriormente. $A''(x) = \frac{(-4 - \pi)}{4}$

$$A''\left(\frac{40}{4 + \pi}\right) = \frac{(-4 - \pi)}{4} < 0$$

Como la segunda derivada es negativa, eso significa que en el valor de x obtenido hay un máximo relativo, tal como habíamos comentado anteriormente.

PROBLEMA 6

b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz.

Se calcula el valor de la altura del rectángulo a partir de la restricción. $x = \frac{40}{4 + \pi}$ $y = \frac{40 - 2x - \pi \cdot x}{4}$

$$y = \frac{40 - 2x - \pi \cdot x}{4} = \frac{40 - (2 + \pi) \cdot x}{4} = \frac{40 - (2 + \pi) \cdot \left(\frac{40}{4 + \pi}\right)}{4} = \frac{40 \cdot (4 + \pi) - 40 \cdot (2 + \pi)}{4 \cdot (4 + \pi)} = \frac{160 + 40\pi - 80 - 40\pi}{4 \cdot (4 + \pi)}$$

$$y = \frac{80}{4 \cdot (4 + \pi)} = \frac{20}{4 + \pi} \approx 2,8$$

La base de la ventana es: $x = \frac{40}{4 + \pi}$ **metros**

La altura de la parte rectangular de la ventana es: $y = \frac{20}{4 + \pi}$ **metros**

El radio del semicírculo es: $R = \frac{x}{2} = \frac{20}{4 + \pi}$ **metros**

PROBLEMA 6

c) Calcular el valor de dicha área máxima.

Se sustituye el valor de x en la función obtenida en el apartado a). $A(x) = \frac{(-4 - \pi)}{8} \cdot x^2 + 10x$ $x = \frac{40}{4 + \pi}$

$$A\left(\frac{40}{4 + \pi}\right) = \frac{(-4 - \pi)}{8} \cdot \left(\frac{40}{4 + \pi}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{40}{4 + \pi}\right) = \frac{-(4 + \pi)}{8} \cdot \frac{1600}{(4 + \pi)^2} + \frac{400}{4 + \pi} = \frac{-200}{4 + \pi} + \frac{400}{4 + \pi} = \frac{200}{4 + \pi} \approx 28 \text{ m}^2$$

El área máxima es: $\frac{200}{4 + \pi}$ *metros cuadrados*

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2023



Problema 7
Probabilidad

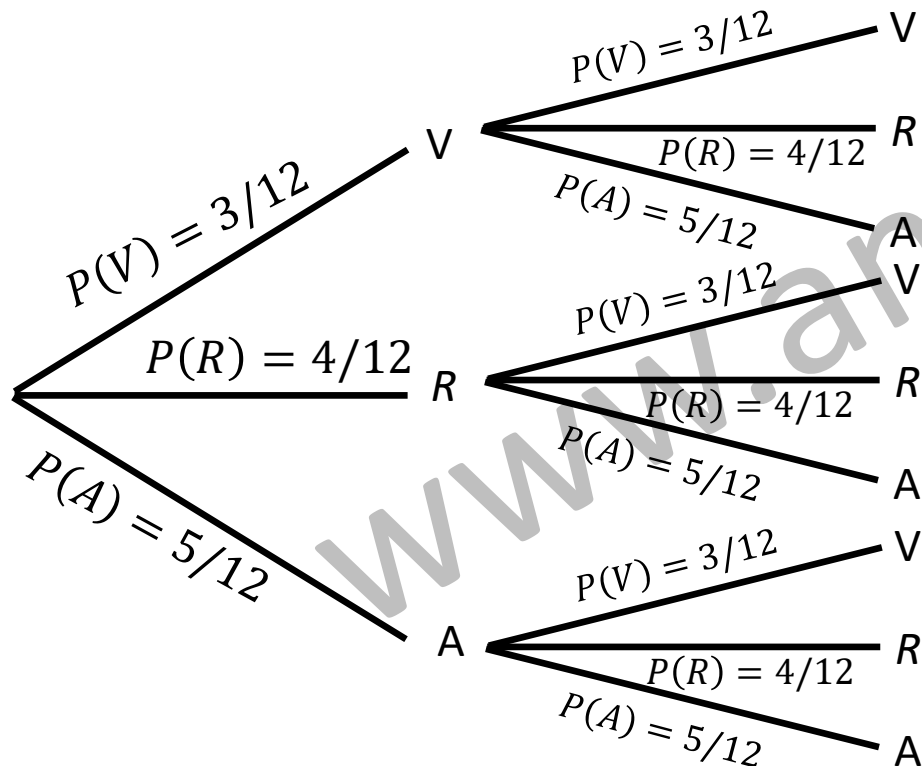
PROBLEMA 7

Una urna tiene tres bolas verdes, cuatro rojas y cinco amarillas. Todas de igual tamaño.

a) Se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. Se repite de nuevo, una vez más, esta operación. ¿Cuál es la probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo? ¿Y la probabilidad de que sean distintos?

b) Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean de distinto color?

Solución: Se construye el diagrama de árbol. Al devolver la bola, las probabilidades permanecen constantes.



Se definen los sucesos:

V=se extrae una bola verde.

R=se extrae una bola roja.

A=se extrae una bola amarilla.

Los sucesos son independientes, ya que la bola extraída se devuelve a la urna, por eso no se ponen probabilidades condicionadas.

PROBLEMA 7

a) Se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. Se repite de nuevo, una vez más, esta operación. ¿Cuál es la probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo? ¿Y la probabilidad de que sean distintos?

Se aplica el principio de multiplicación y se suman las probabilidades.

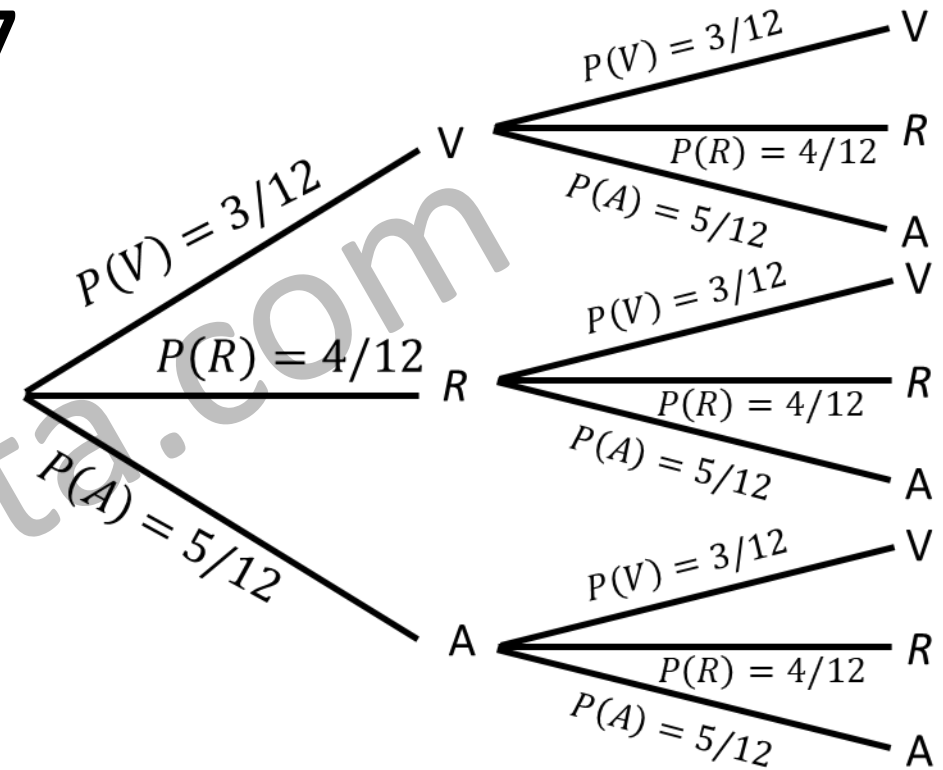
$$P(V \cap V) + P(R \cap R) + P(A \cap A) = \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} + \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{25}{72}$$

La probabilidad de dos bolas del mismo color es: **25/72**.

Para calcular la probabilidad de que las bolas sean de distinto color, utilizo la probabilidad del suceso contrario.

$$P(\text{Distinto color}) = 1 - P(\text{Mismo color}) = 1 - \frac{25}{72} = \frac{47}{72}$$

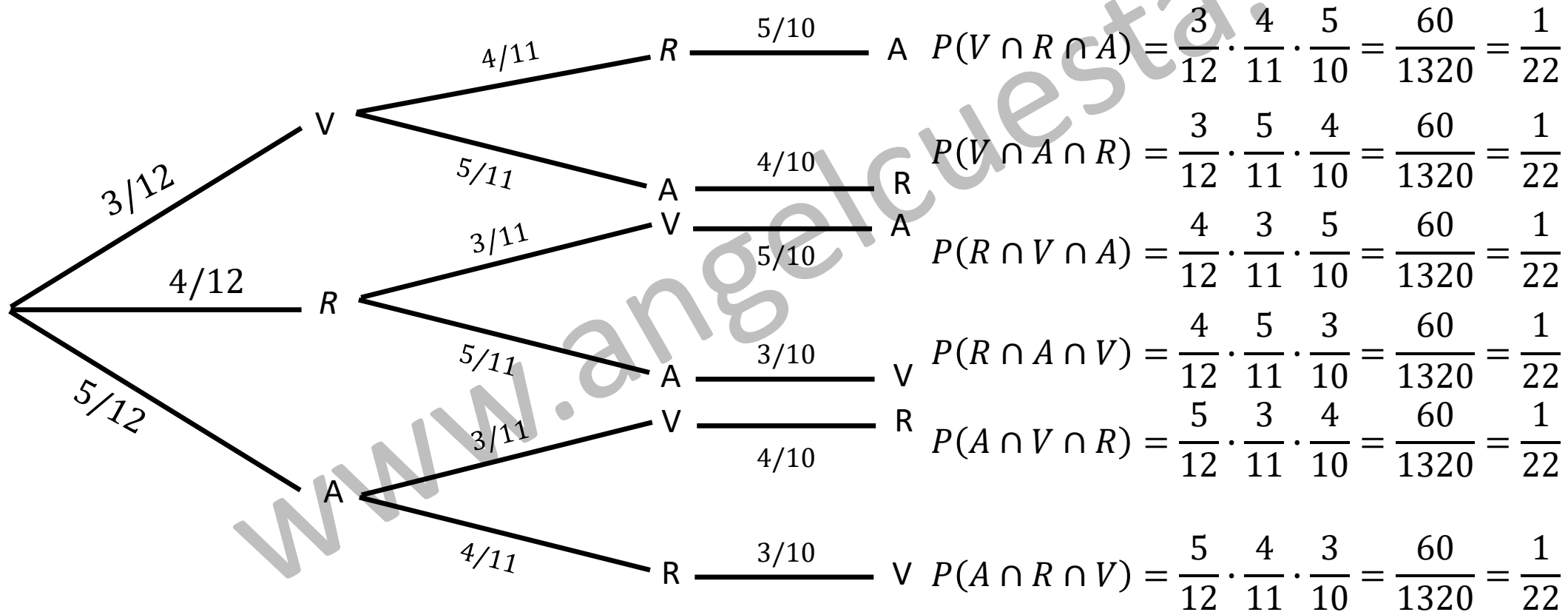
La probabilidad de dos bolas sean de distinto color es: **47/72**.



PROBLEMA 7

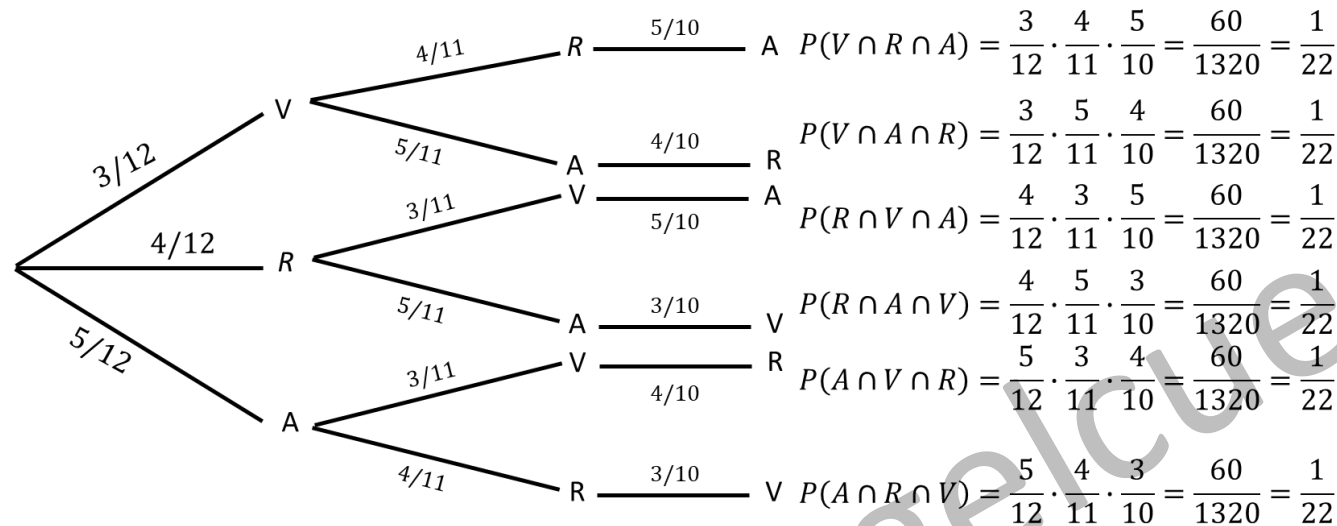
b) Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean de distinto color?

Debemos representar un nuevo diagrama de árbol. Los sucesos son los mismos de antes. Para que el diagrama de árbol no sea tan complicado, voy a representar sólo los sucesos en los que las bolas son de distinto color.



PROBLEMA 7

b) Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean de distinto color?



Se suman todas las probabilidades. Como todas son iguales, se multiplica por 6 una de ellas.

$$P(\text{distinto color}) = 6 \cdot P(V \cap R \cap A) = 6 \cdot \frac{1}{22} = \frac{3}{11}$$

La probabilidad de que las tres bolas sean de distinto color es **3/11**.

NOTA: En el examen se avisa de que el resultado debe expresarse en forma fraccionaria o con cuatro números decimales. Yo prefiero hacerlo en forma fraccionaria ya que me parece que es la forma adecuada para proporcionar un resultado exacto.

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2023



Problema 8
Probabilidad

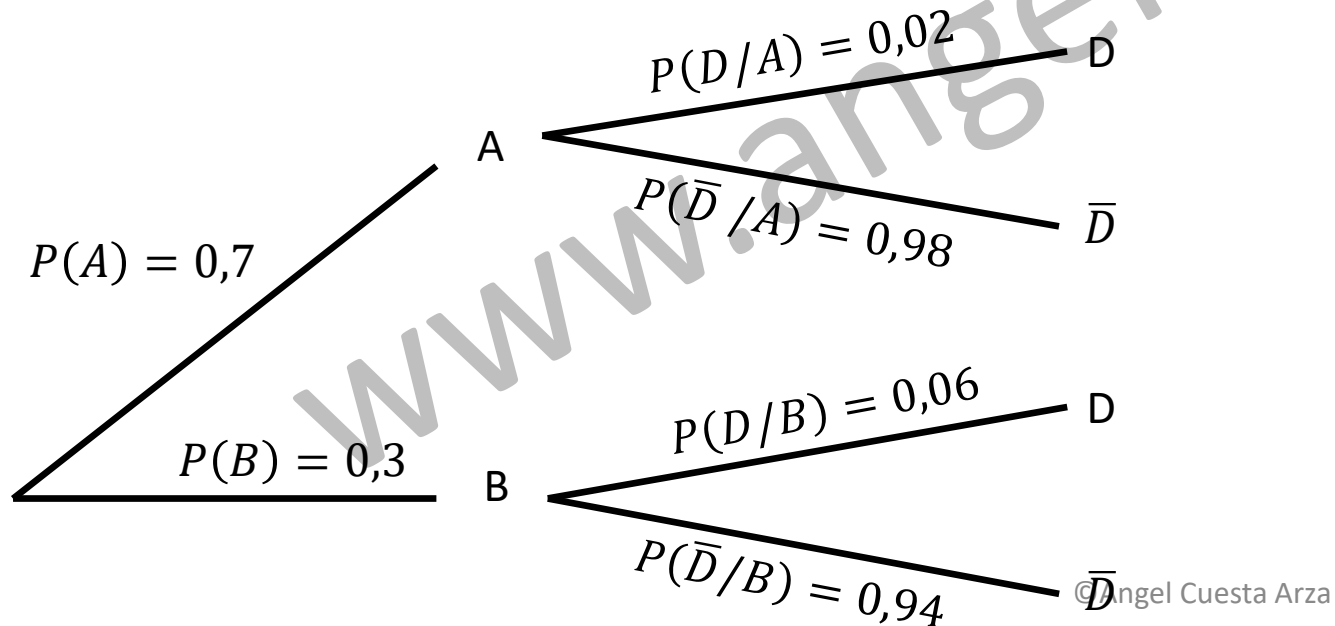
PROBLEMA 8

Una empresa tiene dos plantas de producción de teléfonos móviles. La primera planta produce móviles defectuosos con probabilidad 0,02 y la segunda planta con probabilidad 0,06. Al comprar un móvil de esa empresa, la probabilidad de que sea de la primera planta es de 0,7. Compramos un móvil. Se pide determinar:

- a) La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso.
- b) Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción.

Solución: Se construye el diagrama de árbol. Se definen los sucesos en primer lugar.

A=el móvil se produce en la primera planta B= el móvil se produce en la segunda planta D=El móvil es defectuoso



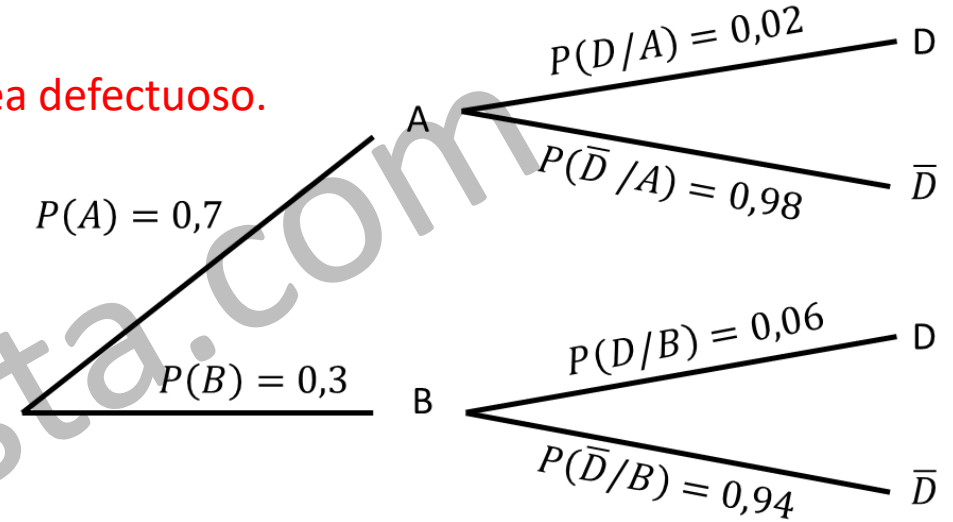
PROBLEMA 8

a) La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso.

Se aplica el principio de multiplicación.

$$P(B \cap D) = P(B) \cdot P(D/B) = 0,3 \cdot 0,06 = 0,018$$

La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso es **0,018**.



b) Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción.

Aplicamos el teorema de Bayes:

$$P(A/D) = \frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B)} = \frac{0,7 \cdot 0,02}{0,7 \cdot 0,02 + 0,3 \cdot 0,06} = \frac{7}{16} = 0,4375$$

Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción es **7/16**.