

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2023



Problema 1

Álgebra matricial/Sistemas de ecuaciones

Problema 1

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real:

- a) Discutir el sistema en función del parámetro a .
- b) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

Solución:

Se operan A y X. $A \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot x + (a+1) \cdot y + 1 \cdot z \\ 1 \cdot x + a \cdot y + 2 \cdot z \\ 1 \cdot x + 1 \cdot y + (a+2) \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + (a+1)y + z \\ x + ay + 2z \\ x + y + (a+2)z \end{pmatrix}$

Se obtiene la igualdad: $\begin{pmatrix} 2x + (a+1)y + z \\ x + ay + 2z \\ x + y + (a+2)z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Para que dos matrices sean iguales, deben serlo todos sus términos a_{ij} .

$$\begin{cases} 2x + (a+1)y + z = -1 \\ x + ay + 2z = 1 \\ x + y + (a+2)z = 2 \end{cases} \quad \text{Se discute el sistema aplicando el teorema de Rouché.}$$

Problema 1

a) Discutir el sistema en función del parámetro a .

$$\begin{cases} 2x + (a+1)y + z = -1 \\ x + ay + 2z = 1 \\ x + y + (a+2)z = 2 \end{cases}$$

Se definen la matriz de los coeficientes y la matriz ampliada.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 2 \end{pmatrix}$$

Calculo el rango de A en función de a utilizando su determinante. $|A| = \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{vmatrix} = a^2 + 2a - 3$

Se iguala a cero y se resuelve la ecuación de segundo grado. $a^2 + 2a - 3 = 0 \longrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a = -3 \end{cases}$

Si $a \neq 1$ y $a \neq -3$ entonces $|A| \neq 0$, **Ran(A) = 3** $\longrightarrow$ **Ran(A*) = 3**

Si $a = 1$ o $a = -3$ entonces $|A| = 0$, **Ran(A) < 3** $\longrightarrow$ Debo calcular el rango de A y de A* sustituyendo los valores de a en las matrices.

En esta ocasión, calcularé de forma simultánea el Rango de A y de A* utilizando el método de Gauss para los valores concretos de a . También podría hacerse mediante el uso de determinantes.

Problema 1

$$\text{Si } a = 1 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

A

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_2=2F_2-F_1 \\ F_3=2F_3-F_1}]{F_2=2F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{\text{¡ OJO !}}]{F_3=3F_3-5F_2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A

$$\begin{cases} 2x + (a+1)y + z = -1 \\ x + ay + 2z = 1 \\ x + y + (a+2)z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 2 \end{pmatrix}$$

Al finalizar el método de Gauss se observa que A y A* tienen dos filas linealmente independientes. Para $a = 1$, **Ran(A) = 2 y Ran(A*) = 2**.

$$\text{Si } a = -3 \longrightarrow A^* = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F_3=2F_3-F_1}]{F_2=2F_2-F_1} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & -3 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3=F_3+F_2} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

A

Al finalizar el método de Gauss se observa que A tiene dos filas linealmente independientes y que A* tiene las tres filas linealmente independientes. Para $a = -3$, **Ran(A) = 2 y Ran(A*) = 3**.

Problema 1

Se hace el cuadro resumen, para dar la solución al apartado a).

	Ran(A)	Ran(A*)	Nº incógnitas	Tipo de Sistema	Número de soluciones
Si $a \neq 1$ y $a \neq -3$	3	3	3	S.C.D.	Única
Si $a = 1$	2	2	3	S.C.I.	Infinitas
Si $a = -3$	2	3	3	S.I.	Sin solución

$$\begin{cases} 2x + (a+1)y + z = -1 \\ x + ay + 2z = 1 \\ x + y + (a+2)z = 2 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

Para resolver el sistema de ecuaciones aprovecharemos la matriz escalonada obtenida en el apartado anterior para $a=1$.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = -1 \\ 3z = 3 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = -1 \\ z = 1; y = \lambda \end{cases} \longrightarrow 2x + 2\lambda + 1 = -1 \longrightarrow x = -\lambda - 1$$

La solución del sistema para $a = 1$ es:

$$\boxed{\begin{cases} x = -1 - \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}}$$