

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2023



Problema 2

Álgebra matricial

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



ÁNGEL CUESTA

Tu profesor en la red

SUSCRÍBETE

Problema 2

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener:

- a) La matriz $M = (A - \alpha \cdot I)^2$, donde α es un parámetro real.
- b) El valor de α , si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula.

Solución: Se calcula en primer lugar la matriz, $A - \alpha \cdot I$

$$A - \alpha \cdot I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3 - \alpha \end{pmatrix}$$

Se calcula en segundo lugar la matriz $M = (A - \alpha \cdot I)^2$, multiplicando la matriz obtenida anteriormente por sí misma.

$$M = (A - \alpha \cdot I)^2 = (A - \alpha \cdot I) \cdot (A - \alpha \cdot I) = \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3 - \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\alpha & -1 & -2 \\ -1 & -\alpha & -2 \\ 1 & 1 & 3 - \alpha \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} (-\alpha) \cdot (-\alpha) + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 & (-\alpha) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-\alpha) + (-2) \cdot 1 & (-\alpha) \cdot (-2) + (-1) \cdot (-2) + (-2) \cdot (3 - \alpha) \\ (-1) \cdot (-\alpha) + (-\alpha) \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + (-\alpha) \cdot (-\alpha) + (-2) \cdot 1 & (-1) \cdot (-2) + (-\alpha) \cdot (-2) + (-2) \cdot (3 - \alpha) \\ 1 \cdot (-\alpha) + 1 \cdot (-1) + (3 - \alpha) \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-\alpha) + (3 - \alpha) \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2) + (3 - \alpha) \cdot (3 - \alpha) \end{pmatrix}$$

Problema 2

Continúo operando la matriz obtenida anteriormente.

$$M = \begin{pmatrix} (-\alpha) \cdot (-\alpha) + (-1) \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 & (-\alpha) \cdot (-1) + (-1) \cdot (-\alpha) + (-2) \cdot 1 & (-\alpha) \cdot (-2) + (-1) \cdot (-2) + (-2) \cdot (3 - \alpha) \\ (-1) \cdot (-\alpha) + (-\alpha) \cdot (-1) + (-2) \cdot 1 & (-1) \cdot (-1) + (-\alpha) \cdot (-\alpha) + (-2) \cdot 1 & (-1) \cdot (-2) + (-\alpha) \cdot (-2) + (-2) \cdot (3 - \alpha) \\ 1 \cdot (-\alpha) + 1 \cdot (-1) + (3 - \alpha) \cdot 1 & 1 \cdot (-1) + 1 \cdot (-\alpha) + (3 - \alpha) \cdot 1 & 1 \cdot (-2) + 1 \cdot (-2) + (3 - \alpha) \cdot (3 - \alpha) \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \alpha^2 + 1 - 2 & \alpha + \alpha - 2 & 2\alpha + 2 - 6 + 2\alpha \\ \alpha + \alpha - 2 & 1 + \alpha^2 - 2 & 2 + 2\alpha - 6 + 2\alpha \\ -\alpha - 1 + 3 - \alpha & -1 - \alpha + 3 - \alpha & -2 - 2 + 9 - 6\alpha + \alpha^2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & 2\alpha - 2 & 4\alpha - 4 \\ 2\alpha - 2 & \alpha^2 - 1 & 4\alpha - 4 \\ -2\alpha + 2 & -2\alpha + 2 & \alpha^2 - 6\alpha + 5 \end{pmatrix}}$$

Problema 2

b) El valor de α , si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula.

Recordamos que: $M = \begin{pmatrix} \alpha^2 - 1 & 2\alpha - 2 & 4\alpha - 4 \\ 2\alpha - 2 & \alpha^2 - 1 & 4\alpha - 4 \\ -2\alpha + 2 & -2\alpha + 2 & \alpha^2 - 6\alpha + 5 \end{pmatrix}$

Para que M sea igual a la matriz nula, todos y cada uno de sus elementos a_{ij} deben ser nulos. Por consiguiente:

$$a_{11} = \alpha^2 - 1 = 0 \rightarrow \alpha = \pm 1 \quad a_{12} = 2\alpha - 2 = 0 \rightarrow \alpha = 1 \quad a_{13} = 4\alpha - 4 = 0 \rightarrow \alpha = 1$$

$$a_{21} = 2\alpha - 2 = 0 \rightarrow \alpha = 1 \quad a_{22} = \alpha^2 - 1 = 0 \rightarrow \alpha = \pm 1 \quad a_{23} = 4\alpha - 4 = 0 \rightarrow \alpha = 1$$

$$a_{31} = -2\alpha + 2 = 0 \rightarrow \alpha = 1 \quad a_{32} = -2\alpha + 2 = 0 \rightarrow \alpha = 1 \quad a_{33} = \alpha^2 - 6\alpha + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \alpha = 5 \end{cases}$$

Se observa que hay una solución común para los nueve elementos de la matriz.

Solución: $\alpha = 1$