

Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2023



Problema 5

Análisis de funciones e integrales

Problema 5

Consideremos la función $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$

- a) Comprobar que $x = -1/2$ es una discontinuidad evitable.
- b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
- c) Obtener $\int f(x) dx$. (Aclaración mía: La primitiva de la función $f(x)$.)

Solución:

Para que la discontinuidad de $f(x)$ sea evitable debe existir el límite cuando x tiende a $-1/2$ y dicho valor debe ser diferente del valor de la imagen de la función en $x = -1/2$.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{no existe la imagen de } f(x) \text{ en } x = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{0}{0} = \text{INDET}$$

Para resolver la indeterminación se deben factorizar los polinomios.

Problema 5

Consideremos la función $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$

a) **Comprobar que $x = -1/2$ es una discontinuidad evitable.** Se factorizan los polinomios para resolver la indeterminación.

Puesto que sé que $-1/2$ es raíz de ambos polinomios, aplico la regla de Ruffini para factorizar.

Numerador: $P(x) = -2x^2 + x + 1$

Denominador: $Q(x) = 2x^2 + 5x + 2$

$$\begin{array}{r|rrr} -1/2 & -2 & 1 & 1 \\ & & 1 & -1 \\ \hline & -2 & 2 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|rrr} -1/2 & 2 & 5 & 2 \\ & & -1 & -2 \\ \hline & 2 & 4 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (-2x + 2)$$

$$Q(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (2x + 4)$$

Se calcula el límite:
$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (-2x + 2)}{\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (2x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{-2x + 2}{2x + 4} = \frac{-2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 4} = \frac{3}{3} = 1$$

Problema 5

Consideremos la función $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$

a) Comprobar que $x = -1/2$ es una discontinuidad evitable. Se analiza la continuidad de la función.

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{-2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 2} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{no existe la imagen de } f(x) \text{ en } x = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2} = 1 \rightarrow \text{existe el límite cuando } x \text{ tiende a } -\frac{1}{2}$$

Puesto que existe el límite, pero no la imagen, podemos afirmar que **$f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x = -1/2$.**

Problema 5

Consideremos la función $f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$

b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución: Se calcula el dominio de la función. Para calcular el dominio se iguala el denominador a cero.

$$2x^2 + 5x + 2 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1/2 \\ x_2 = -2 \end{cases} \text{ lo cual implica que el Dominio es: } \text{Dom } f(x) = \mathbf{R - \{-2, -1/2\}}$$

Se calcula la derivada de la función para estudiar la monotonía. Se simplifica primero y se deriva después.

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2} = \frac{\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (-2x + 2)}{\left(x + \frac{1}{2}\right) \cdot (2x + 4)} \rightarrow g(x) = \frac{-2x + 2}{2x + 4} = \frac{2 \cdot (-x + 1)}{2 \cdot (x + 2)} = \frac{-x + 1}{x + 2}$$

$$f'(x) = g'(x) = \frac{-1 \cdot (x + 2) - (-x + 1) \cdot 1}{(x + 2)^2} = \frac{-3}{(x + 2)^2}$$

NOTA IMPORTANTE: Aunque la función original y la simplificada no son exactamente las mismas (la original tiene una discontinuidad evitable en $x = -1/2$ y la simplificada no), su monotonía es la misma excepto en dicho valor de x .

Problema 5

$$f'(x) = \frac{-3}{(x+2)^2}$$

Igualamos la derivada a cero:

$$\frac{-3}{(x+2)^2} = 0 \longrightarrow -3 = 0 \quad \text{No existe ningún valor que anule la derivada}$$

Se hace el estudio de signos de $f(x)$, teniendo en cuenta los valores de x que están fuera del dominio.

	$-\infty$	-2	$-1/2$	$+\infty$
$f'(x)$	—	—	—	
$f(x)$				

$f(x)$ es **decreciente** en $\mathbb{R} - \{-2, -1/2\}$

Problema 5

$$f(x) = \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2}$$

c) Obtener $\int f(x) dx$. (Aclaración mía: La primitiva de la función $f(x)$.)

Al igual que en el apartado b), se puede utilizar la expresión simplificada de $f(x)$. Aunque no sean las mismas funciones por los motivos expuestos anteriormente, la expresión de su función primitiva será la misma.

$$\int f(x) dx = \int \frac{-2x^2 + x + 1}{2x^2 + 5x + 2} dx = \int \frac{-x + 1}{x + 2} dx = - \int \frac{x - 1}{x + 2} dx = - \int \frac{x - 1 + 3 - 3}{x + 2} dx = - \int \frac{x + 2 - 3}{x + 2} dx$$

$$\int f(x) dx = - \left(\int \frac{x + 2}{x + 2} dx - \int \frac{3}{x + 2} dx \right) = - \left(\int 1 dx - \int \frac{3}{x + 2} dx \right) = -(x - 3 \cdot \ln|x + 2|)$$

$$\int f(x) dx = -x + 3 \cdot \ln|x + 2| + C$$

NOTA: se podría haber resuelto la integral dividiendo en primer lugar y expresando el cociente en función del cociente, el resto y el divisor.