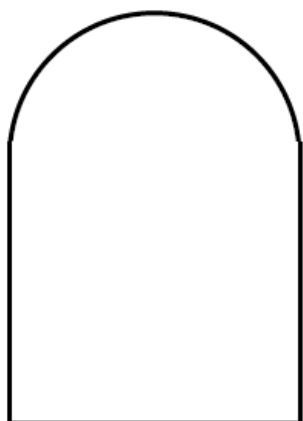


Selectividad Comunidad Valenciana



Matemáticas II

Julio 2023



Problema 6

Problema de optimización

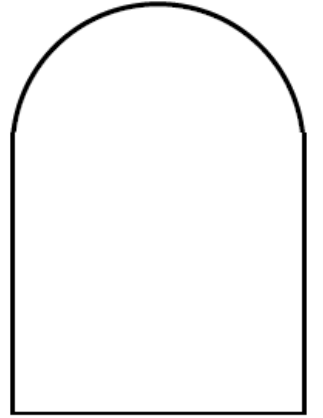


Aprende a resolver problemas
de optimización de funciones.
Teoría y ejercicios.



PROBLEMA 6

Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo tal y como se indica en la siguiente figura. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros:



- a) Calcular el área de la ventana en función de su anchura x .
- b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz.
- c) Calcular el valor de dicha área máxima.

Solución: Se definen las variables del problema: x =anchura del rectángulo; y =altura del rectángulo.

Se expresa el área de la figura en función de x e y en primer lugar. $A = A_{\text{rectángulo}} + A_{\text{Semicírculo}} = x \cdot y + \frac{\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2}$

Se plantea una ecuación que relacione las distintas variables del problema. $\text{Perímetro} = x + 2y + \frac{\pi \cdot x}{2} = 20$

Se despeja y de la ecuación y se sustituye en la función de modo que nos quede el área de la ventana en función de x .

$$x + 2y + \frac{\pi \cdot x}{2} = 20 \rightarrow y = \frac{20 - x - \frac{\pi \cdot x}{2}}{2} = 10 - \frac{x}{2} - \frac{\pi \cdot x}{4} = \frac{40 - 2x - \pi \cdot x}{4}$$

$$A(x) = x \cdot y + \frac{\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = x \cdot \left(\frac{40 - 2x - \pi \cdot x}{4}\right) + \frac{\pi \cdot x^2}{8} = \frac{40x - 2x^2 - \pi \cdot x^2}{4} + \frac{\pi \cdot x^2}{8}$$

PROBLEMA 6

a) Calcular el área de la ventana en función de su anchura x .

$$A(x) = \frac{40x - 2x^2 - \pi \cdot x^2}{4} + \frac{\pi \cdot x^2}{8} = \frac{80x - 4x^2 - 2 \cdot \pi \cdot x^2 + \pi \cdot x^2}{8} = \frac{(-4 - \pi) \cdot x^2 + 80x}{8} = \frac{(-4 - \pi)}{8} \cdot x^2 + 10x$$

El dominio de la función se define a partir de las restricciones dadas por el perímetro y por $x > 0$ e $y > 0$ (ya que x e y son longitudes).

$$y = \frac{40 - 2x - \pi \cdot x}{4} > 0 \longrightarrow 40 - 2x - \pi \cdot x > 0 \longrightarrow 2x + \pi \cdot x < 40 \longrightarrow x \cdot (2 + \pi) < 40 \longrightarrow x < \frac{40}{2 + \pi}$$

$$A(x) = \frac{(-4 - \pi)}{8} \cdot x^2 + 10x$$

Siendo el dominio de la función: $0 < x < \frac{40}{2 + \pi}$

PROBLEMA 6

b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz.

Podemos observar que la función área es una función cuadrática, por lo que debemos calcular el máximo de una función cuadrática. El coeficiente del término cuadrático es negativo, lo cual nos indica que el vértice de la función es el máximo.

$$A(x) = \frac{(-4 - \pi)}{8} \cdot x^2 + 10x$$

Bastaría con calcular el vértice de la función utilizando la fórmula habitual de 4º de ESO. Pero como este ejercicio está propuesto en las PAU, lo resolveré utilizando derivadas. Por eso, calculo la derivada de la función A(x).

$$A'(x) = \frac{(-4 - \pi)}{4} \cdot x + 10 \quad \text{Se iguala a cero para obtener el óptimo local.}$$

$$\frac{(-4 - \pi)}{4} \cdot x + 10 = 0 \longrightarrow \frac{(-4 - \pi)}{4} \cdot x = -10 \quad x = \frac{-10}{\frac{(-4 - \pi)}{4}} = \frac{40}{4 + \pi} \approx 5,6$$

Aunque ya hemos justificado que es un máximo, vamos a comprobarlo utilizando el **criterio de la segunda derivada**.

Se calcula la segunda derivada y se sustituye el valor de x obtenido anteriormente. $A''(x) = \frac{(-4 - \pi)}{4}$

$$A''\left(\frac{40}{4 + \pi}\right) = \frac{(-4 - \pi)}{4} < 0$$

Como la segunda derivada es negativa, eso significa que en el valor de x obtenido hay un máximo relativo, tal como habíamos comentado anteriormente.

PROBLEMA 6

b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz.

Se calcula el valor de la altura del rectángulo a partir de la restricción. $x = \frac{40}{4 + \pi}$ $y = \frac{40 - 2x - \pi \cdot x}{4}$

$$y = \frac{40 - 2x - \pi \cdot x}{4} = \frac{40 - (2 + \pi) \cdot x}{4} = \frac{40 - (2 + \pi) \cdot \left(\frac{40}{4 + \pi}\right)}{4} = \frac{40 \cdot (4 + \pi) - 40 \cdot (2 + \pi)}{4 \cdot (4 + \pi)} = \frac{160 + 40\pi - 80 - 40\pi}{4 \cdot (4 + \pi)}$$

$$y = \frac{80}{4 \cdot (4 + \pi)} = \frac{20}{4 + \pi} \approx 2,8$$

La base de la ventana es: $x = \frac{40}{4 + \pi}$ **metros**

La altura de la parte rectangular de la ventana es: $y = \frac{20}{4 + \pi}$ **metros**

El radio del semicírculo es: $R = \frac{x}{2} = \frac{20}{4 + \pi}$ **metros**

PROBLEMA 6

c) Calcular el valor de dicha área máxima.

Se sustituye el valor de x en la función obtenida en el apartado a). $A(x) = \frac{(-4 - \pi)}{8} \cdot x^2 + 10x$ $x = \frac{40}{4 + \pi}$

$$A\left(\frac{40}{4 + \pi}\right) = \frac{(-4 - \pi)}{8} \cdot \left(\frac{40}{4 + \pi}\right)^2 + 10 \cdot \left(\frac{40}{4 + \pi}\right) = \frac{-(4 + \pi)}{8} \cdot \frac{1600}{(4 + \pi)^2} + \frac{400}{4 + \pi} = \frac{-200}{4 + \pi} + \frac{400}{4 + \pi} = \frac{200}{4 + \pi} \approx 28 \text{ m}^2$$

El área máxima es: $\frac{200}{4 + \pi}$ *metros cuadrados*