

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Julio 2024



Problema 1
Álgebra matricial

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



Cálculo de la matriz inversa



PAU JULIO 2023



PAU JUNIO 2023



Problema 1

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, donde k es un número real:

- a) ¿Para qué valores del parámetro k la matriz A es invertible?
- b) Para $k = 0$, si existe, calcular la matriz inversa de A .
- c) Para $k = 0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $AD = DA$.

Solución: Una matriz es invertible cuando es cuadrada y su determinante es distinto de cero.

Se calcula el determinante, se iguala a cero y se resuelve la ecuación.

$$\begin{vmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 3k + 2k - (2 + 0 - k^2) = k^2 - k - 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 2 \end{cases}$$

Si $k \neq -1$ y $k \neq 2$ entonces A será invertible.

b) Para $k = 0$, si existe, calcular la matriz inversa de A . $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Calculo $|A|$; $|A| = k^2 - k - 2 \xrightarrow{k=0} |A| = -2$ $|A| \neq 0$, la matriz A **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1/3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1/3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1/3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2 & -2/3 \\ -3 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 2/3 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Para $k = 0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $AD = DA$. $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Se define la matriz diagonal D , cuyos elementos de la diagonal principal son desconocidos. $D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$

Se calculan ambos productos.

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3z \\ 0 & \frac{1}{3}y & z \\ 2x & -y & -z \end{pmatrix} \quad D \cdot A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3x \\ 0 & \frac{1}{3}y & y \\ 2z & -z & -z \end{pmatrix}$$

Para que las dos matrices sean iguales deben coincidir todos sus términos a_{ij} .

$$\begin{cases} 3z = 3x \longrightarrow z = x \longrightarrow x = y = z \\ z = y \longrightarrow z = y \\ 2x = 2z \\ -y = -z \end{cases} \longrightarrow \text{ECUACIONES REDUNDANTES}$$

La matriz diagonal pedida es: $D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R}$

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Julio 2024



Problema 2
Álgebra matricial

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



Cálculo de la matriz inversa



PAU JULIO 2023



PAU JUNIO 2023



Problema 2

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Se pide:

- a) Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene una única solución.
- b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2X = B$, encontrar el valor de α, β y γ dependiendo del parámetro real a .

Solución: Se despeja en primer lugar la ecuación matricial.

$$A^2 \cdot X = B \longrightarrow (A^2)^{-1} \cdot A^2 \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot B \longrightarrow I \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot B \longrightarrow X = (A^2)^{-1} \cdot B$$

La ecuación matricial tendrá solución si existe la inversa de A^2 . Para que dicha inversa exista, su determinante debe ser distinto de cero.

Puesto que: $|A^2| = |A|^2$ Por lo tanto, basta con que $|A| \neq 0$ para que la ecuación matricial tenga solución única.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (3 - 2a) = 0 \longrightarrow 3 - 2a = 0 \longrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Si $a \neq 3/2$ entonces la ecuación matricial tendrá una solución única.

Problema 2

b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2X = B$, encontrar el valor de α , β y γ dependiendo del parámetro real a .

Se calcula en primer lugar la matriz A^2 .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot a & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot a & 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ a \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot a & a \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & a \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 + 2a & 0 & 8 \\ 9 + a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a + 9 \end{pmatrix}$$

Se calcula en segundo lugar la matriz $A^2 \cdot X$, siendo $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$A^2 \cdot X = \begin{pmatrix} 1 + 2a & 0 & 8 \\ 9 + a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a + 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + 2a) \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 8 \cdot (-1) \\ (9 + a) \cdot 3 + 4 \cdot (-2) + 11 \cdot (-1) \\ 4a \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + (2a + 9) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a - 5 \\ 3a + 8 \\ 10a - 9 \end{pmatrix}$$

Problema 2

b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2X = B$, encontrar el valor de α , β y γ dependiendo del parámetro real a .

Dos matrices son iguales si lo son todos sus términos a_{ij} .

$$A^2 \cdot X = B \longrightarrow \begin{pmatrix} 6a - 5 \\ 3a + 8 \\ 10a - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 6a - 5 \\ \beta = 3a + 8 \\ \gamma = 10a - 9 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} \alpha = 6a - 5 \\ \beta = 3a + 8 \\ \gamma = 10a - 9 \end{cases} ; a \in \mathbb{R}$

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Julio 2024



Problema 3
Geometría

REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



PAU Junio 2024
Problema 3



PAU Junio 2024
Problema 4

©Angel Cuesta Arza



PROBLEMA 3

Se dan las rectas: $r: x - 1 = y - 2 = \frac{z - 1}{2}$ y $s: \frac{x - 3}{-2} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z + 1}{2}$. Se pide

a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección.

Para que dos rectas se corten en un punto P , sus coordenadas (a, b, c) **deben pertenecer a ambas rectas** y, además, dicho punto debe **ser único**. En este caso, basta con igualar las coordenadas de ambas rectas y comprobar que hay un único conjunto de valores en el que coinciden ambas rectas. No comprobaré mediante rangos que se cortan, ya que, al encontrar el punto de corte, habré comprobado que se cortan. En otros vídeos he explicado como analizar la posición relativa de dos rectas.

Se expresan ambas ecuaciones en forma paramétrica. $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$ $s: \begin{cases} x = 3 - 2\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = -1 + 2\mu \end{cases} \mu \in \mathbb{R}$

Se igualan las coordenadas. $\begin{cases} 1 + \lambda = 3 - 2\mu \\ 2 + \lambda = 3 - \mu \\ 1 + 2\lambda = -1 + 2\mu \end{cases}$

Se resuelve el sistema de ecuaciones. Se toman las dos primeras ecuaciones y se resuelve el sistema formado por ellas. Se comprueba la solución obtenida en la tercera ecuación.

PROBLEMA 3

Se dan las rectas: $r: x - 1 = y - 2 = \frac{z - 1}{2}$ y $s: \frac{x - 3}{-2} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z + 1}{2}$. Se pide

a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección.

$$\begin{cases} 1 + \lambda = 3 - 2\mu \\ 2 + \lambda = 3 - \mu \\ 1 + 2\lambda = -1 + 2\mu \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 1 + \lambda = 3 - 2\mu \\ 2 + \lambda = 3 - \mu \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = 2 \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Comprueba que para los valores de los parámetros obtenidos se verifica también la tercera ecuación.

$$1 + 2\lambda = -1 + 2\mu \longrightarrow 1 + 2 \cdot 0 = -1 + 2 \cdot 1 \longrightarrow 1 = 1$$

Por lo tanto, ambas rectas se cortan en un punto. Calculo sus coordenadas sustituyendo el parámetro en la ecuación paramétrica correspondiente.

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \xrightarrow{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda = 0} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ambas rectas se cortan, y lo hacen en: **$P = (1, 2, 1)$**

PROBLEMA 3

Se dan las rectas: $r: x - 1 = y - 2 = \frac{z - 1}{2}$ y $s: \frac{x - 3}{-2} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z + 1}{2}$. Se pide

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s .

El vector director de la recta r es: $\vec{u} = (1, 1, 2)$ y el de la recta s es: $\vec{v} = (-2, -1, 2)$

Para calcular un vector ortogonal a $\vec{u} = (1, 1, 2)$ y $\vec{v} = (-2, -1, 2)$, debo calcular su producto vectorial.

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k} = (4, -6, 1)$$

Escribo las ecuaciones paramétricas a partir del punto común y del vector perpendicular a r y s : $P = (1, 2, 1)$
 $\vec{w} = (4, -6, 1)$

$$t: \begin{cases} x = 1 + 4\alpha \\ y = 2 - 6\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$$

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Julio 2024



Problema 4
Geometría

REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



PAU Junio 2024
Problema 3



PAU Junio 2024
Problema 4

©Angel Cuesta Arza



PROBLEMA 4

Sea el plano $\pi: 6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

a) Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad.

Se aplica la fórmula correspondiente. $d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$d = \frac{|6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - d|}{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-d|}{\sqrt{61}} = 1 \longrightarrow |-d| = \sqrt{61} \longrightarrow d = \pm\sqrt{61}$$

Los posibles valores de d son: $d = \pm\sqrt{61}$

PROBLEMA 4

Sea el plano $\pi: 6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

b) Calcular, en función del parámetro d , las coordenadas de los puntos A , B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X , Y y Z , respectivamente.

Las ecuaciones de los ejes de coordenadas son: Eje X : $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; Eje Y : $\begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$; Eje Z : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$; $\lambda, \mu, \alpha \in \mathbb{R}$

Sustituyendo cada ecuación en la ecuación del plano, obtendremos los puntos de intersección correspondientes.

$$\begin{aligned} \text{Eje } X \text{ con } \pi: 6 \cdot \lambda + 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - d = 0 &\longrightarrow \lambda = \frac{d}{6} \longrightarrow A = \left(\frac{d}{6}, 0, 0 \right) \\ \text{Eje } Y \text{ con } \pi: 6 \cdot 0 + 4 \cdot \mu - 3 \cdot 0 - d = 0 &\longrightarrow \mu = \frac{d}{4} \longrightarrow B = \left(0, \frac{d}{4}, 0 \right) \\ \text{Eje } Z \text{ con } \pi: 6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot \alpha - d = 0 &\longrightarrow \alpha = -\frac{d}{3} \longrightarrow C = \left(0, 0, -\frac{d}{3} \right) \end{aligned}$$

PROBLEMA 4

Sea el plano $\pi: 6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

c) Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior.

$$A = \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right) \quad B = \left(0, \frac{d}{4}, 0\right) \quad C = \left(0, 0, -\frac{d}{3}\right)$$

Calculo los vectores pedidos a partir de los puntos obtenidos en el apartado anterior.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \left(0, \frac{d}{4}, 0\right) - \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right) = \left(-\frac{d}{6}, \frac{d}{4}, 0\right) \quad \overrightarrow{AC} = C - A = \left(0, 0, -\frac{d}{3}\right) - \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right) = \left(-\frac{d}{6}, 0, -\frac{d}{3}\right)$$

Calculo los módulos de los vectores obtenidos.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\left(-\frac{d}{6}\right)^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{16}} = \sqrt{d^2 \cdot \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{16}\right)} = d \cdot \frac{\sqrt{13}}{12}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{\left(-\frac{d}{6}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{d}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{9}} = \sqrt{d^2 \cdot \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{9}\right)} = d \cdot \frac{\sqrt{5}}{6}$$

PROBLEMA 4

Sea el plano $\pi: 6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

c) Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior.

Se calcula el ángulo a partir de la fórmula correspondiente. $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left(-\frac{d}{6}, \frac{d}{4}, 0\right) \cdot \left(-\frac{d}{6}, 0, -\frac{d}{3}\right)}{\left(d \cdot \frac{\sqrt{13}}{12}\right) \cdot \left(d \cdot \frac{\sqrt{5}}{6}\right)} = \frac{\frac{d^2}{36}}{d^2 \cdot \frac{\sqrt{65}}{72}} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{\sqrt{65}}{72}} = \frac{72}{36 \cdot \sqrt{65}} \longrightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{72}{36 \cdot \sqrt{65}}\right) = 75,64^\circ$$

El ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior es **75,64°**.

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Julio 2024



Problema 5
Análisis de funciones

Problema 5

Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:

- a) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = -\frac{3}{4}$
- b) Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$.
- c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas.

Solución:

Para que $h(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = -3/4$, debe verificar que su derivada se anula en dicho valor y que se segunda derivada en $x = -3/4$ sea positiva.

$$h'(x) = a + 2x \longrightarrow h'\left(-\frac{3}{4}\right) = a + 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = a - \frac{3}{2} = 0 \longrightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$h''(x) = 2 \longrightarrow h''\left(-\frac{3}{4}\right) = 2 > 0$$

El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = -3/4$ es **$a = 3/2$** .

Problema 5

Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:

b) Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. $h(x) = \frac{3}{2}x + x^2$ $h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$

Los pasos que seguiremos para representar gráficamente una función cuadrática son:

1) Cálculo del vértice en el valor de x donde la función presenta el mínimo relativo.

$$h\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{9}{16} = -0,5625 \quad \text{El vértice de la parábola se encontrará en el punto: } \mathbf{V} = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{9}{16}\right)$$

2) Cálculo de los puntos de corte con los ejes X e Y.

Puntos de corte con el eje X ($y=0$): Se iguala la función a 0. $\frac{3}{2}x + x^2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & \mathbf{A} = (0, 0) \\ x_2 = -\frac{3}{2} & \mathbf{B} = \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \end{cases}$

El punto de corte con el eje Y ($x=0$): Se sustituye la x por cero en la función.

$$f(0) = \frac{3}{2} \cdot 0 + \frac{3}{2} \cdot 0^2 = 0 \longrightarrow \mathbf{A} = (0, 0)$$

Problema 5

Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:

b) Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. $h(x) = \frac{3}{2}x + x^2$ $h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$

$$V = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{9}{16}\right) \quad A = (0, 0) \quad B = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$$

3) Se dan valores auxiliares alrededor del vértice si con los anteriores no basta.

x	$h(x)$
-1	$-\frac{1}{2}$
1	$\frac{5}{2}$

$$f(-1) = \frac{3}{2} \cdot (-1) + (-1)^2 = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{3}{2} \cdot 1 + 1^2 = \frac{5}{2}$$

Problema 5

Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:

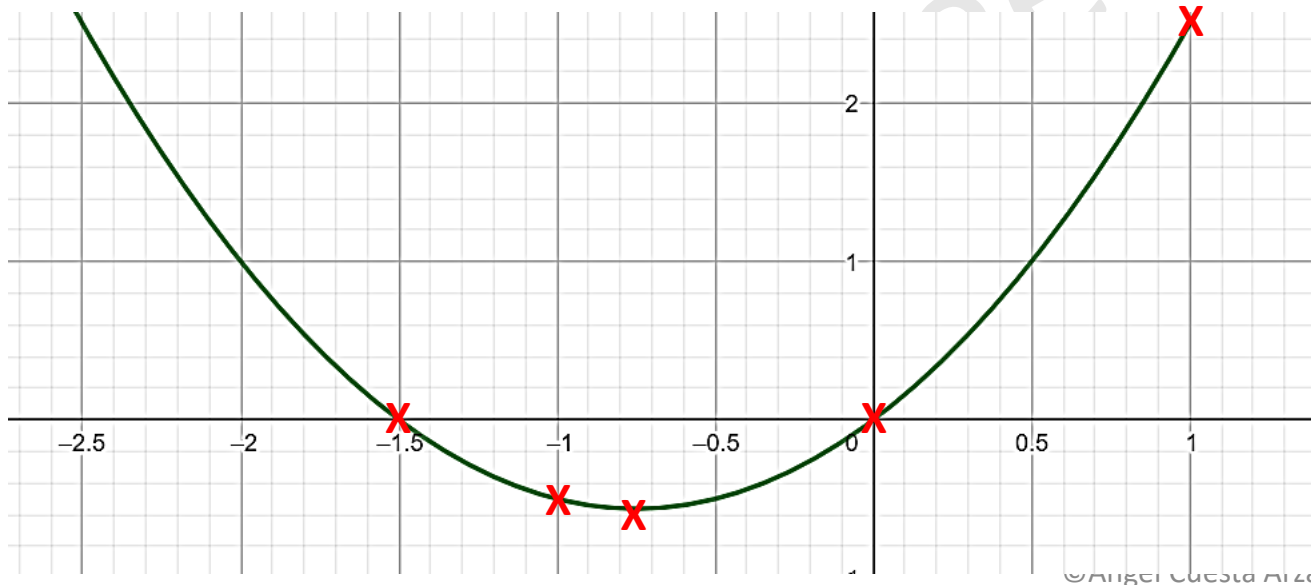
b) Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$.

$$V = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{9}{16}\right) \quad A = (0, 0) \quad B = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$$

x	$h(x)$
-1	$-\frac{1}{2}$
1	$\frac{5}{2}$

$$h(x) = \frac{3}{2}x + x^2 \quad h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$$

Si lo necesitas, puedes dar más valores. A continuación, daremos valores a la función derivada y la representaremos en la misma gráfica.

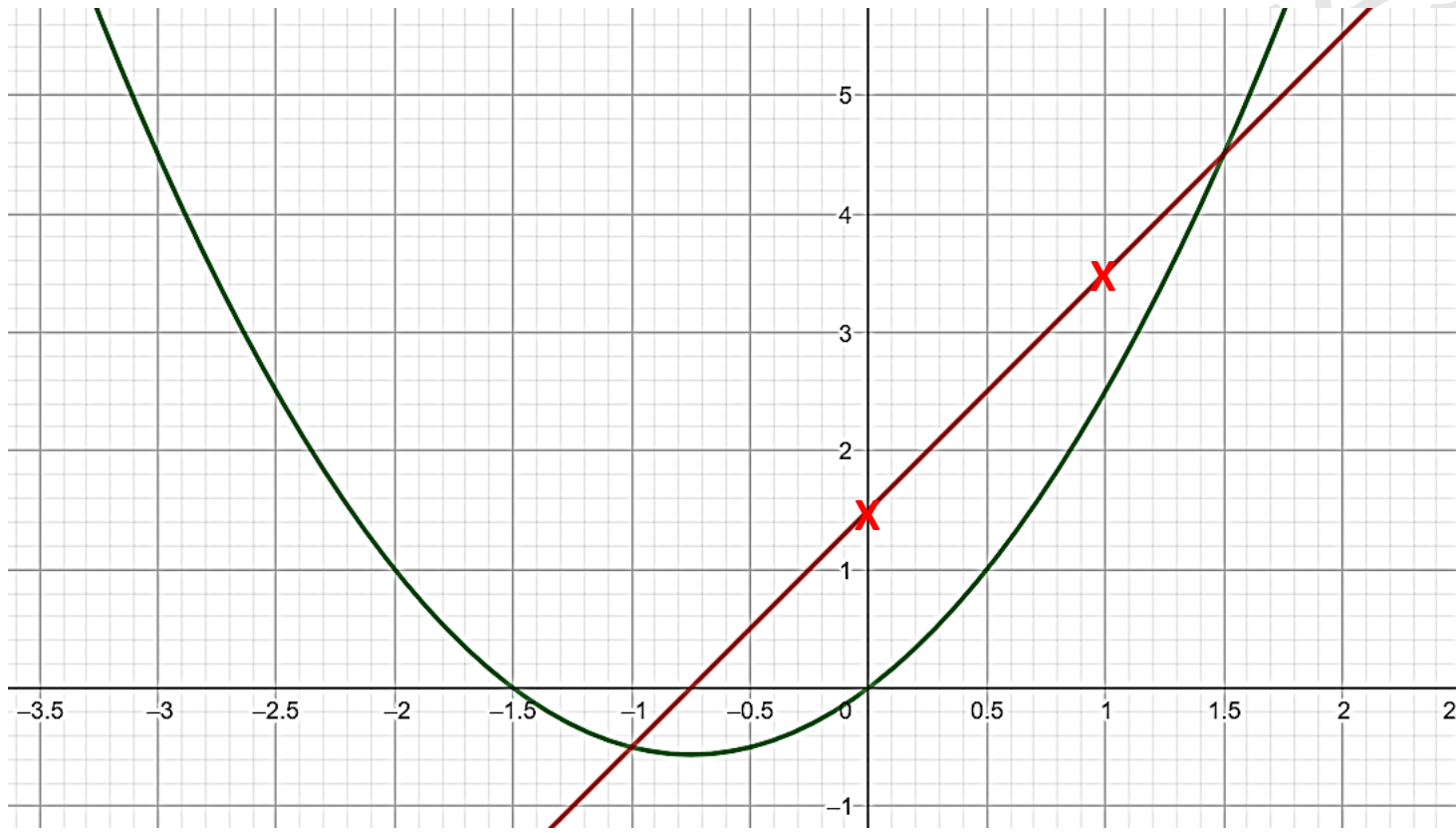


Problema 5

Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:

b) Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. $h(x) = \frac{3}{2}x + x^2$ $h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$

A continuación, daremos valores a la función derivada y la representaremos en la misma gráfica.



x	$h'(x)$
0	$\frac{3}{2}$
1	$\frac{7}{2}$

Problema 5

c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas.

Se muestra en el gráfico el área que debemos calcular.

Para calcular el área pedida, debemos calcular los puntos de corte entre ambas funciones.

$$h(x) = \frac{3}{2}x + x^2 \quad h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$$

Se igualan las funciones. $\frac{3}{2}x + x^2 = \frac{3}{2} + 2x$

Y se resuelve la ecuación de segundo grado que definen.

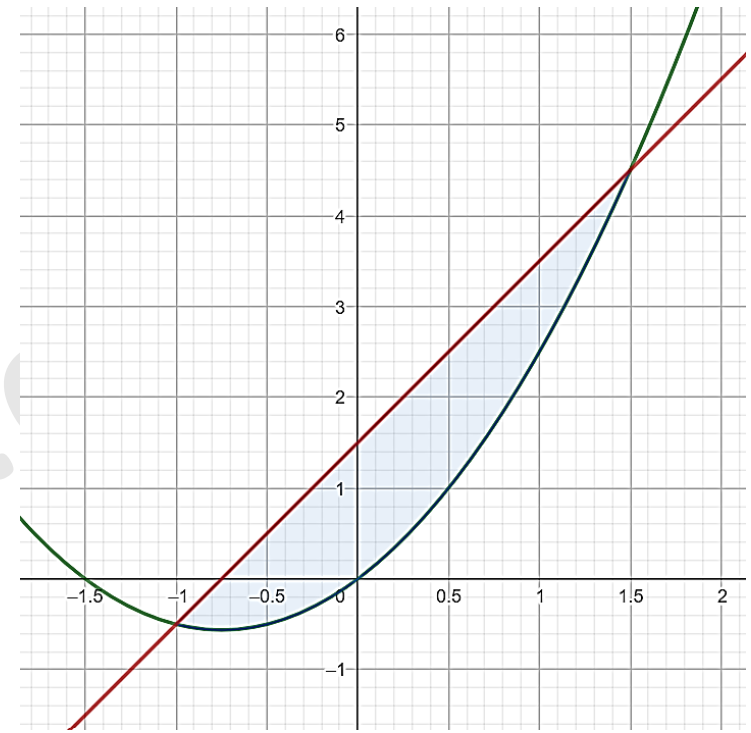
$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \longrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

El área se calcula con la integral definida de la diferencia entre las funciones.

Debemos tener en cuenta que: $h'(x) \geq h(x) \forall x \in [-1, 3/2]$

Los puntos de intersección entre ellas son los límites de integración.

$$A = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2x \right) - \left(\frac{3}{2}x + x^2 \right) dx = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) dx$$



Problema 5

c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas.

$$A = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \cdot x \right]_{-1}^{\frac{3}{2}}$$

$$A = \left(-\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^2}{2} + \frac{3}{2} \cdot (-1) \right) = \left(-\frac{9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{9}{4} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right)$$

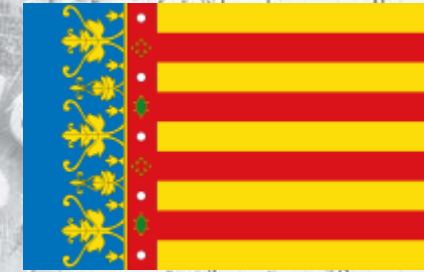
$$A = \frac{27}{16} - \left(-\frac{11}{12} \right) = \frac{27}{16} + \frac{11}{12} = \frac{81}{48} + \frac{44}{48} = \frac{125}{48} \text{ unidades de área}$$

El área del plano comprendida entre ambas curvas es **125/48 unidades de área.**

PAU Comunidad Valenciana



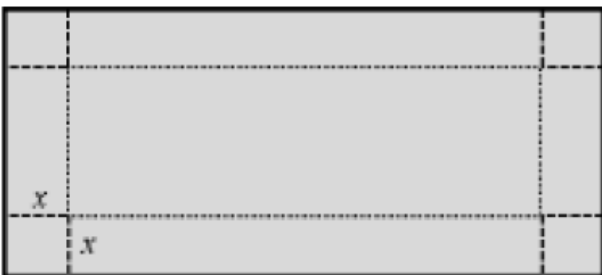
Matemáticas II
Julio 2024



Problema 6

Problema de optimización

©Angel Cuesta Ariza





Aprende a resolver problemas
de optimización de funciones.
Teoría y ejercicios.



PROBLEMA 6

Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud x en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:



a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible.

b) Dicho volumen.

Solución: Se definen los lados de la caja: x =altura de la caja; $10 - 2x$ =anchura de la base del rectángulo de la caja;
 $16 - 2x$ =longitud de la base del rectángulo de la caja.

Se expresa el volumen de la caja en función de x . $V(x) = x \cdot (10 - 2x) \cdot (16 - 2x)$; $0 < x < 5$

Se calcula el máximo relativo de la función en su dominio de definición. Antes de derivar, se opera para obtener una expresión más sencilla de derivar.

$$V(x) = x \cdot (10 - 2x) \cdot (16 - 2x) = (10x - 2x^2) \cdot (16 - 2x) = 4x^3 - 52x^2 + 160x; \quad 0 < x < 5$$

$$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160 \quad \text{Se iguala a cero y se resuelve la ecuación de segundo grado.}$$

$$12x^2 - 104x + 160 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = \frac{20}{3} \end{cases} ; \text{No pertenece al dominio.}$$

PROBLEMA 6

a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible.

Vamos a comprobar si $x_1 = 2$ cm maximiza el volumen de la caja utilizando el **criterio de la segunda derivada**.

Se calcula la segunda derivada y se sustituye el valor de x obtenido anteriormente. $V''(x) = 24x - 104$

$V''(2) = 24 \cdot 2 - 104 < 0$ Como la segunda derivada es negativa, eso significa que en el valor de x obtenido hay un máximo relativo.

Base del rectángulo de la caja: **$16 - 2x = 12$ cm**

Anchura de rectángulo de la caja: **$10 - 2x = 6$ cm**

Altura de la caja: **$x = 2$ cm**

PROBLEMA 6

b) Dicho volumen.

Se sustituye el valor de x en la función obtenida en el apartado a). $V(x) = x \cdot (10 - 2x) \cdot (16 - 2x); \quad x = 2$

$$V(2) = 2 \cdot (10 - 2 \cdot 2) \cdot (16 - 2 \cdot 2) = 2 \cdot 6 \cdot 12 = 144 \text{ cm}^3$$

El volumen máximo es: **144 cm^3**

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Julio 2024



Problema 7
Probabilidad

PREPÁRATE BIEN

Si no has trabajado nunca con probabilidad, te recomiendo que veas y trabajes con mi curso de probabilidad básica y con los dos cursos de probabilidad más avanzados, donde explico el álgebra de conjuntos y los teoremas fundamentales de la probabilidad, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Te dejo los códigos QR y los enlace para que puedas acceder al vídeo correspondiente.



Teoría y ejercicios de probabilidad.

<https://youtu.be/1Dvh2QpL2pw>



Álgebra de conjuntos

https://youtu.be/Pu_6f73w3o8



Teoremas

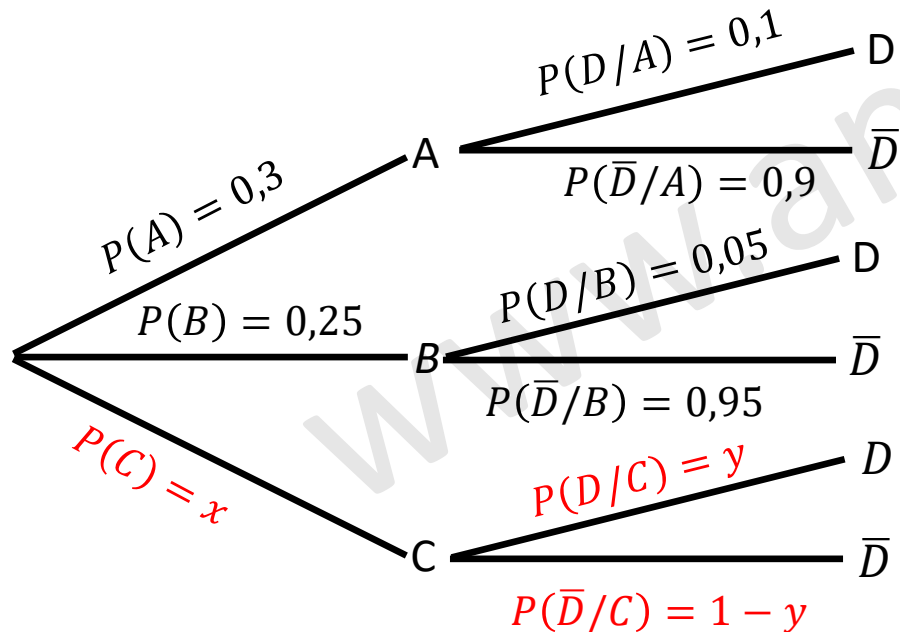
<https://youtu.be/KS6VfQgGOCA>

PROBLEMA 7

Una empresa tiene 3 máquinas de fabricación de latas de refresco. El 10.25% de las latas que fabrica la empresa son defectuosas. El 30% de las latas las fabrica en la primera máquina, siendo el 10% defectuosas. El 25% de las latas las fabrica en la segunda máquina, siendo el 5% defectuosas. El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa?
- b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina?
- c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina?

Solución: Se construye el diagrama de árbol.



Se definen los sucesos:

A=Lata fabricada por la primera máquina.

B= Lata fabricada por la segunda máquina.

C= Lata fabricada por la tercera máquina.

D= La lata es defectuosa.

PROBLEMA 7

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa?

Puesto que sólo hay tres máquinas, la suma de las probabilidades de elegir una de ellas es igual a 1.

$$P(A) + P(B) + P(C) = 1 \rightarrow 0,3 + 0,25 + x = 1 \rightarrow x = 0,45$$

Por otro lado, disponemos del dato de la probabilidad total de que una lata sea defectuosa.

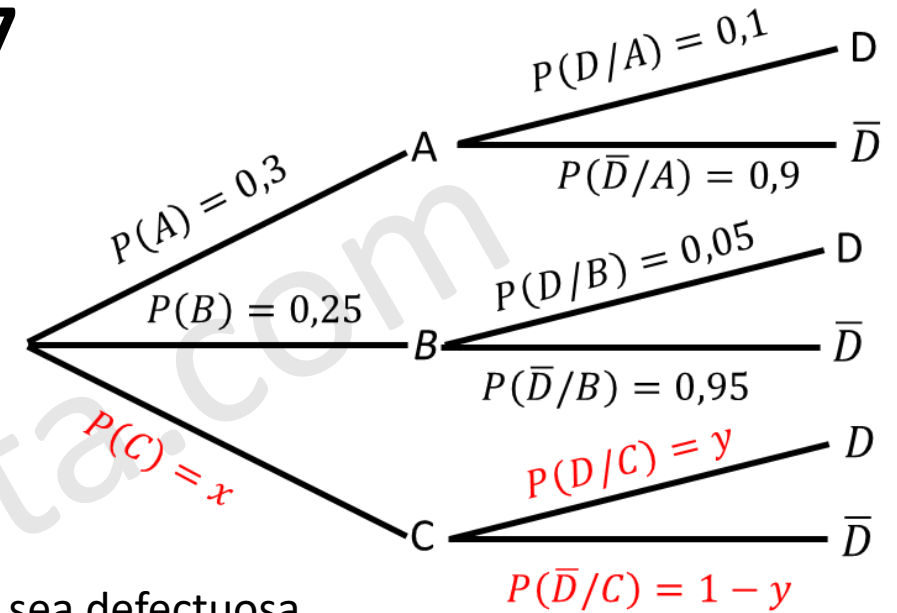
Se aplica el teorema la probabilidad total para calcular la probabilidad pedida.

“El 10.25% de las latas que fabrica la empresa son defectuosas.” $P(D) = 0,1025$

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) = 0,3 \cdot 0,1 + 0,25 \cdot 0,05 + 0,45 \cdot y = 0,1025$$

$$\text{Se despeja } y: 0,3 \cdot 0,1 + 0,0125 + 0,45 \cdot y = 0,1025 \rightarrow y = \frac{2}{15}$$

La probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa es **2/15**.



PROBLEMA 7

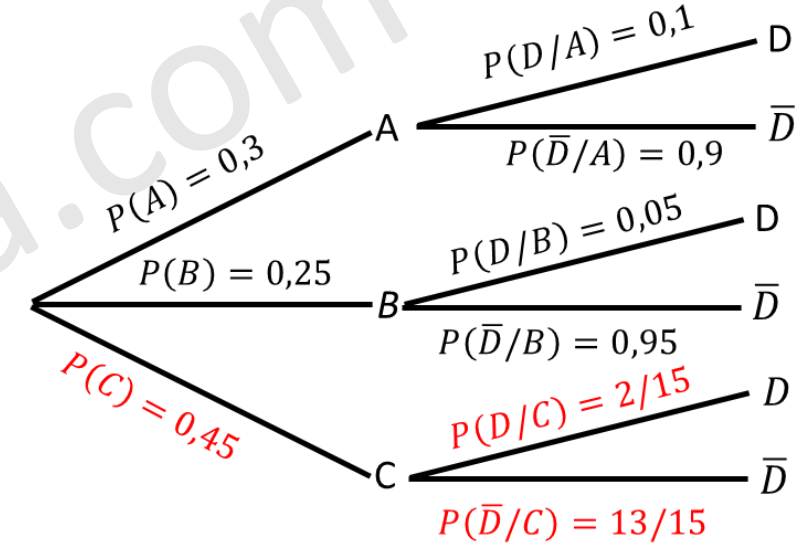
b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina?

Se sustituyen los datos obtenidos en el apartado a) en el diagrama de árbol.

Nos piden una probabilidad condicionada a posteriori, por ello utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(A/\bar{D}) = \frac{P(A \cap \bar{D})}{P(\bar{D})} = \frac{P(A) \cdot P(\bar{D}/A)}{1 - P(D)} = \frac{0,3 \cdot 0,9}{1 - 0,1025} = \frac{108}{359}$$

Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa la probabilidad de que proceda de la primera máquina es **108/359 ≈ 0,3008**.



PROBLEMA 7

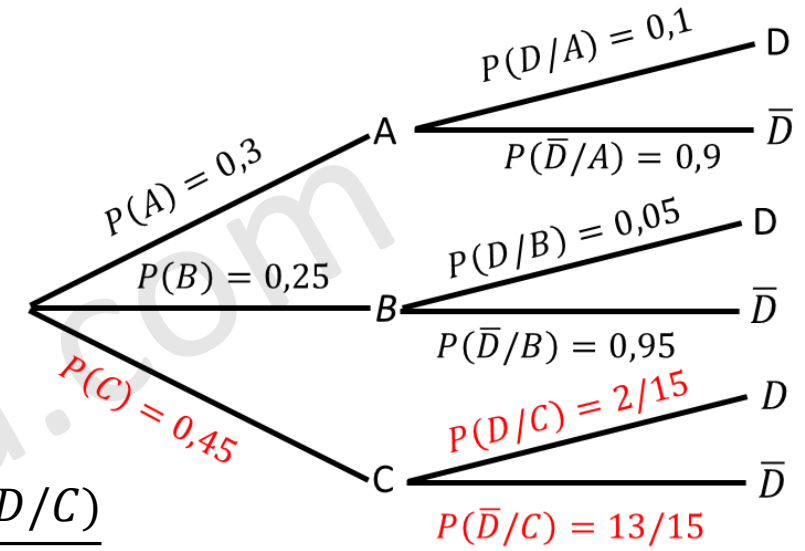
c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina?

Nos piden una probabilidad condicionada a posteriori, por ello utilizamos el teorema de Bayes. Debemos tener en cuenta que los sucesos A y C son incompatibles entre sí.

$$P(\bar{B}/D) = P(A \cup C/D) = \frac{P(A \cap D) + P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(A) \cdot P(D/A) + P(C) \cdot P(D/C)}{P(D)}$$

$$P(\bar{B}/D) = \frac{0,3 \cdot 0,1 + 0,45 \cdot 2/15}{0,1025} = \frac{36}{41}$$

Si se escoge una lata al azar y es defectuosa, la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina es **$36/41 \approx 0,8780$** .



PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Julio 2024



Problema 8
Binomial

PREPÁRATE BIEN

Si no has trabajado nunca con probabilidad, te recomiendo que veas y trabajes con mi curso de probabilidad básica y con los dos cursos de probabilidad más avanzados, donde explico el álgebra de conjuntos y los teoremas fundamentales de la probabilidad, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Te dejo los códigos QR y los enlace para que puedas acceder al vídeo correspondiente.

También es recomendable repasar el contenido de mi vídeo sobre el estudio **de la distribución binomial**.



Distribución binomial

<https://youtu.be/fiElXwykWYY>



Teoría y ejercicios de probabilidad.

<https://youtu.be/1Dvh2QpL2pw>



Álgebra de conjuntos

https://youtu.be/Pu_6f73w3o8



Teoremas

<https://youtu.be/KS6VfQgGOCA>

PROBLEMA 8

Se ha determinado que en el 60% de los mensajes enviados por WhatsApp se añade un emoticono. Una persona envía diez mensajes de WhatsApp. Se pide la probabilidad de que:

- a) Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos.
- b) Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos.
- c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos.

Solución: El experimento “se añade un emoticono al mensaje” sólo tiene **dos** posibles resultados (envía emoticono en el mensaje o no lo envía). Además, el añadir o no un emoticono o no, es **independiente** en cada mensaje que se envía. Por consiguiente, podemos decir que el número de mensajes que tienen un emoticono es una variable aleatoria que sigue una distribución binomial. Siendo:

X =número de mensajes enviados por WhatsApp a los que se añade un emoticono.

p =probabilidad de éxito (el mensaje tiene emoticonos)=**0,6**

q =probabilidad de fracaso (el mensaje NO tiene emoticonos)=**0,4**

n =número de mensajes enviados por WhatsApp.

Podemos escribir: $X \sim Bi(10; 0,6)$

PROBLEMA 8

a) Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos. $X \sim Bi(10; 0,6)$

Se calcula la probabilidad: $P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot (0,6)^0 \cdot (0,4)^{10} = (0,4)^{10} \approx 1,049 \cdot 10^{-4}$

La probabilidad de que ningún mensaje de los diez tenga emoticonos es **$1,049 \cdot 10^{-4}$** , es decir un **0,01049 %**.

b) Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos. $X \sim Bi(10; 0,6)$

Las dos quintas partes de 10 son 4 mensajes con emoticonos.

Se calcula la probabilidad: $P(X = 4) = \binom{10}{4} \cdot (0,6)^4 \cdot (0,4)^6 = 210 \cdot (0,6)^4 \cdot (0,4)^6 \approx 0,1115$

La probabilidad de que cuatro mensajes de los diez tenga emoticonos es **0,1115**, es decir un **11,15 %**.

NOTA: Recuerda que: $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = 210$

Esta aclaración es por si quieres, o tienes que, hacer el ejercicio sin calculadora.

PROBLEMA 8

c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos.

Se calcula la probabilidad: $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} \cdot (0,6)^8 \cdot (0,4)^2 = 45 \cdot (0,6)^8 \cdot (0,4)^2 \approx 0,1209$$

$$P(X = 9) = \binom{10}{9} \cdot (0,6)^9 \cdot (0,4)^1 = 10 \cdot (0,6)^9 \cdot (0,4)^1 \approx 0,0403$$

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} \cdot (0,6)^{10} \cdot (0,4)^0 = 1 \cdot (0,6)^{10} \cdot (0,4)^0 \approx 0,0060$$

$$P(X \geq 8) = 0,1209 + 0,0403 + 0,0060 = 0,1672$$

La probabilidad de que ocho o más mensajes tengan emoticonos es **0,1672**, es decir un **16,72 %**.

NOTA: También se puede hacer el ejercicio utilizando la tabla que proporcionan en el examen. Se realizará a continuación. Creo que vale la pena trabajar el ejercicio con la tabla puesto que en la universidad es habitual trabajar con este tipo de tablas.

BONUS-USO DE LA TABLA

c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos. $X \sim Bi(10; 0,6)$

Si tratamos de utilizar la tabla, nos encontraremos con el problema de que la probabilidad de éxito igual a **0,6** no está en la tabla que nos proporcionan en el examen. **Sólo hay valores comprendidos entre 0 y 0,5.**

Por ello, debemos hacer un cambio de variable y definir una nueva variable aleatoria asociada al suceso contrario, es decir, el número de mensajes que no tienen emoticono.

Y =número de mensajes que NO tienen emoticono.

p =probabilidad de éxito (el mensaje NO tiene emoticonos)=**0,4**

q =probabilidad de fracaso (el mensaje tiene emoticonos)=**0,6**

Podemos escribir: $Y \sim Bi(10; 0,4)$

Ahora debemos reescribir la pregunta en función de Y . $X + Y = 10 \longrightarrow X = 10 - Y$

$$P(X \geq 8) \xrightarrow{X = 10 - Y} P(10 - Y \geq 8) \longrightarrow P(-Y \geq -2) \longrightarrow P(Y \leq 2)$$

Ahora ya podemos utilizar la tabla.

BONUS-USO DE LA TABLA

c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos. $Y \sim Bi(10; 0,4)$

$$P(Y \leq 2) = 0,1673$$

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))
Tabla de la distribución Binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = p(X \leq x) = \sum_{k=1}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0	0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2	0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3	1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719

La probabilidad de que ocho o más mensajes tengan emoticonos es **0,1673**, es decir un **16,73 %**.

NOTA: El resultado cambia en una diezmilésima.