

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II  
Julio 2024



Problema 1  
Álgebra matricial

# OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



Cálculo de la matriz inversa



PAU JULIO 2023



PAU JUNIO 2023



# Problema 1

Se considera la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ , donde  $k$  es un número real:

- a) ¿Para qué valores del parámetro  $k$  la matriz  $A$  es invertible?
- b) Para  $k = 0$ , si existe, calcular la matriz inversa de  $A$ .
- c) Para  $k = 0$ , hallar las matrices diagonales  $D$  que verifican  $AD = DA$ .

**Solución:** Una matriz es invertible cuando es cuadrada y su determinante es distinto de cero.

Se calcula el determinante, se iguala a cero y se resuelve la ecuación.

$$\begin{vmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 - 3k + 2k - (2 + 0 - k^2) = k^2 - k - 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} k = -1 \\ k = 2 \end{cases}$$

Si  $k \neq -1$  y  $k \neq 2$  entonces  $A$  será invertible.

b) Para  $k = 0$ , si existe, calcular la matriz inversa de  $A$ .  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1) Calculo  $|A|$ ;  $|A| = k^2 - k - 2 \xrightarrow{k=0} |A| = -2$   $|A| \neq 0$ , la matriz  $A$  **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos:  $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1/3 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1/3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1/3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 & 2 & -2/3 \\ -3 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos:  $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 2/3 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula:  $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 2/3 & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ -2/3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 3/2 & 1/2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Para  $k = 0$ , hallar las matrices diagonales  $D$  que verifican  $AD = DA$ .  $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Se define la matriz diagonal  $D$ , cuyos elementos de la diagonal principal son desconocidos.  $D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix}$

Se calculan ambos productos.

$$A \cdot D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3z \\ 0 & \frac{1}{3}y & z \\ 2x & -y & -z \end{pmatrix} \quad D \cdot A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1/3 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3x \\ 0 & \frac{1}{3}y & y \\ 2z & -z & -z \end{pmatrix}$$

Para que las dos matrices sean iguales deben coincidir todos sus términos  $a_{ij}$ .

$$\begin{cases} 3z = 3x \longrightarrow z = x \longrightarrow x = y = z \\ z = y \longrightarrow z = y \\ 2x = 2z \\ -y = -z \end{cases} \longrightarrow \text{ECUACIONES REDUNDANTES}$$

La matriz diagonal pedida es:  $D = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}; x \in \mathbb{R}$