

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Julio 2024



Problema 2
Álgebra matricial

OTROS VÍDEOS PARA PRACTICAR



Si quieres repasar matrices y determinantes tengo un curso en este mismo canal.



Cálculo de la matriz inversa



PAU JULIO 2023



PAU JUNIO 2023



Problema 2

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Se pide:

- a) Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene una única solución.
- b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2X = B$, encontrar el valor de α, β y γ dependiendo del parámetro real a .

Solución: Se despeja en primer lugar la ecuación matricial.

$$A^2 \cdot X = B \longrightarrow (A^2)^{-1} \cdot A^2 \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot B \longrightarrow I \cdot X = (A^2)^{-1} \cdot B \longrightarrow X = (A^2)^{-1} \cdot B$$

La ecuación matricial tendrá solución si existe la inversa de A^2 . Para que dicha inversa exista, su determinante debe ser distinto de cero.

Puesto que: $|A^2| = |A|^2$ Por lo tanto, basta con que $|A| \neq 0$ para que la ecuación matricial tenga solución única.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (3 - 2a) = 0 \longrightarrow 3 - 2a = 0 \longrightarrow a = \frac{3}{2}$$

Si $a \neq 3/2$ entonces la ecuación matricial tendrá una solución única.

Problema 2

b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2X = B$, encontrar el valor de α, β y γ dependiendo del parámetro real a .

Se calcula en primer lugar la matriz A^2 .

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot a & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot a & 3 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ a \cdot 1 + 0 \cdot 3 + 3 \cdot a & a \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & a \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 3 \cdot 3 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 + 2a & 0 & 8 \\ 9 + a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a + 9 \end{pmatrix}$$

Se calcula en segundo lugar la matriz $A^2 \cdot X$, siendo $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$A^2 \cdot X = \begin{pmatrix} 1 + 2a & 0 & 8 \\ 9 + a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a + 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + 2a) \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + 8 \cdot (-1) \\ (9 + a) \cdot 3 + 4 \cdot (-2) + 11 \cdot (-1) \\ 4a \cdot 3 + 0 \cdot (-2) + (2a + 9) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a - 5 \\ 3a + 8 \\ 10a - 9 \end{pmatrix}$$

Problema 2

b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2X = B$, encontrar el valor de α , β y γ dependiendo del parámetro real a .

Dos matrices son iguales si lo son todos sus términos a_{ij} .

$$A^2 \cdot X = B \longrightarrow \begin{pmatrix} 6a - 5 \\ 3a + 8 \\ 10a - 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} \alpha = 6a - 5 \\ \beta = 3a + 8 \\ \gamma = 10a - 9 \end{cases}$$

Solución: $\begin{cases} \alpha = 6a - 5 \\ \beta = 3a + 8 \\ \gamma = 10a - 9 \end{cases} ; a \in \mathbb{R}$