

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Julio 2024



Problema 3
Geometría

REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



PAU Junio 2024
Problema 3



PAU Junio 2024
Problema 4

©Angel Cuesta Arza



PROBLEMA 3

Se dan las rectas: $r: x - 1 = y - 2 = \frac{z - 1}{2}$ y $s: \frac{x - 3}{-2} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z + 1}{2}$. Se pide

a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección.

Para que dos rectas se corten en un punto P , sus coordenadas (a, b, c) **deben pertenecer a ambas rectas** y, además, dicho punto debe **ser único**. En este caso, basta con igualar las coordenadas de ambas rectas y comprobar que hay un único conjunto de valores en el que coinciden ambas rectas. No comprobaré mediante rangos que se cortan, ya que, al encontrar el punto de corte, habré comprobado que se cortan. En otros vídeos he explicado como analizar la posición relativa de dos rectas.

Se expresan ambas ecuaciones en forma paramétrica. $r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$ $s: \begin{cases} x = 3 - 2\mu \\ y = 3 - \mu \\ z = -1 + 2\mu \end{cases} \mu \in \mathbb{R}$

Se igualan las coordenadas. $\begin{cases} 1 + \lambda = 3 - 2\mu \\ 2 + \lambda = 3 - \mu \\ 1 + 2\lambda = -1 + 2\mu \end{cases}$

Se resuelve el sistema de ecuaciones. Se toman las dos primeras ecuaciones y se resuelve el sistema formado por ellas. Se comprueba la solución obtenida en la tercera ecuación.

PROBLEMA 3

Se dan las rectas: $r: x - 1 = y - 2 = \frac{z - 1}{2}$ y $s: \frac{x - 3}{-2} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z + 1}{2}$. Se pide

a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección.

$$\begin{cases} 1 + \lambda = 3 - 2\mu \\ 2 + \lambda = 3 - \mu \\ 1 + 2\lambda = -1 + 2\mu \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 1 + \lambda = 3 - 2\mu \\ 2 + \lambda = 3 - \mu \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\mu = 2 \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{cases}$$

Comprueba que para los valores de los parámetros obtenidos se verifica también la tercera ecuación.

$$1 + 2\lambda = -1 + 2\mu \longrightarrow 1 + 2 \cdot 0 = -1 + 2 \cdot 1 \longrightarrow 1 = 1$$

Por lo tanto, ambas rectas se cortan en un punto. Calculo sus coordenadas sustituyendo el parámetro en la ecuación paramétrica correspondiente.

$$r: \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \xrightarrow{\lambda \in \mathbb{R}, \lambda = 0} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

Ambas rectas se cortan, y lo hacen en: **$P = (1, 2, 1)$**

PROBLEMA 3

Se dan las rectas: $r: x - 1 = y - 2 = \frac{z - 1}{2}$ y $s: \frac{x - 3}{-2} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z + 1}{2}$. Se pide

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s .

El vector director de la recta r es: $\vec{u} = (1, 1, 2)$ y el de la recta s es: $\vec{v} = (-2, -1, 2)$

Para calcular un vector ortogonal a $\vec{u} = (1, 1, 2)$ y $\vec{v} = (-2, -1, 2)$, debo calcular su producto vectorial.

$$\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 6\vec{j} + \vec{k} = (4, -6, 1)$$

Escribo las ecuaciones paramétricas a partir del punto común y del vector perpendicular a r y s : $P = (1, 2, 1)$
 $\vec{w} = (4, -6, 1)$

$$t: \begin{cases} x = 1 + 4\alpha \\ y = 2 - 6\alpha \\ z = 1 + \alpha \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$$