

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Julio 2024



Problema 4
Geometría

REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



PAU Junio 2024
Problema 3



PAU Junio 2024
Problema 4

©Angel Cuesta Arza



PROBLEMA 4

Sea el plano $\pi: 6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

a) Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad.

Se aplica la fórmula correspondiente. $d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

$$d = \frac{|6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - d|}{\sqrt{6^2 + 4^2 + (-3)^2}} = \frac{|-d|}{\sqrt{61}} = 1 \longrightarrow |-d| = \sqrt{61} \longrightarrow d = \pm\sqrt{61}$$

Los posibles valores de d son: **$d = \pm\sqrt{61}$**

PROBLEMA 4

Sea el plano $\pi: 6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

b) Calcular, en función del parámetro d , las coordenadas de los puntos A , B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X , Y y Z , respectivamente.

Las ecuaciones de los ejes de coordenadas son: Eje X : $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$; Eje Y : $\begin{cases} x = 0 \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}$; Eje Z : $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$; $\lambda, \mu, \alpha \in \mathbb{R}$

Sustituyendo cada ecuación en la ecuación del plano, obtendremos los puntos de intersección correspondientes.

$$\begin{aligned} \text{Eje } X \text{ con } \pi: 6 \cdot \lambda + 4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 - d = 0 &\longrightarrow \lambda = \frac{d}{6} \longrightarrow A = \left(\frac{d}{6}, 0, 0 \right) \\ \text{Eje } Y \text{ con } \pi: 6 \cdot 0 + 4 \cdot \mu - 3 \cdot 0 - d = 0 &\longrightarrow \mu = \frac{d}{4} \longrightarrow B = \left(0, \frac{d}{4}, 0 \right) \\ \text{Eje } Z \text{ con } \pi: 6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 3 \cdot \alpha - d = 0 &\longrightarrow \alpha = -\frac{d}{3} \longrightarrow C = \left(0, 0, -\frac{d}{3} \right) \end{aligned}$$

PROBLEMA 4

Sea el plano $\pi: 6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

c) Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior.

$$A = \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right) \quad B = \left(0, \frac{d}{4}, 0\right) \quad C = \left(0, 0, -\frac{d}{3}\right)$$

Calculo los vectores pedidos a partir de los puntos obtenidos en el apartado anterior.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = \left(0, \frac{d}{4}, 0\right) - \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right) = \left(-\frac{d}{6}, \frac{d}{4}, 0\right) \quad \overrightarrow{AC} = C - A = \left(0, 0, -\frac{d}{3}\right) - \left(\frac{d}{6}, 0, 0\right) = \left(-\frac{d}{6}, 0, -\frac{d}{3}\right)$$

Calculo los módulos de los vectores obtenidos.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{\left(-\frac{d}{6}\right)^2 + \left(\frac{d}{4}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{16}} = \sqrt{d^2 \cdot \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{16}\right)} = d \cdot \frac{\sqrt{13}}{12}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{\left(-\frac{d}{6}\right)^2 + 0^2 + \left(-\frac{d}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{d^2}{36} + \frac{d^2}{9}} = \sqrt{d^2 \cdot \left(\frac{1}{36} + \frac{1}{9}\right)} = d \cdot \frac{\sqrt{5}}{6}$$

PROBLEMA 4

Sea el plano $\pi: 6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

c) Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior.

Se calcula el ángulo a partir de la fórmula correspondiente. $\cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}$

$$\cos(\alpha) = \frac{\left(-\frac{d}{6}, \frac{d}{4}, 0\right) \cdot \left(-\frac{d}{6}, 0, -\frac{d}{3}\right)}{\left(d \cdot \frac{\sqrt{13}}{12}\right) \cdot \left(d \cdot \frac{\sqrt{5}}{6}\right)} = \frac{\frac{d^2}{36}}{d^2 \cdot \frac{\sqrt{65}}{72}} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{\sqrt{65}}{72}} = \frac{72}{36 \cdot \sqrt{65}} \longrightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{72}{36 \cdot \sqrt{65}}\right) = 75,64^\circ$$

El ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior es **75,64°**.