

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Julio 2024



Problema 5
Análisis de funciones

Problema 5

Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:

- a) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = -\frac{3}{4}$
- b) Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$.
- c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas.

Solución:

Para que $h(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = -3/4$, debe verificar que su derivada se anula en dicho valor y que se segunda derivada en $x = -3/4$ sea positiva.

$$h'(x) = a + 2x \longrightarrow h'\left(-\frac{3}{4}\right) = a + 2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) = a - \frac{3}{2} = 0 \longrightarrow a = \frac{3}{2}$$

$$h''(x) = 2 \longrightarrow h''\left(-\frac{3}{4}\right) = 2 > 0$$

El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = -3/4$ es **$a = 3/2$** .

Problema 5

Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:

b) Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. $h(x) = \frac{3}{2}x + x^2$ $h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$

Los pasos que seguiremos para representar gráficamente una función cuadrática son:

1) Cálculo del vértice en el valor de x donde la función presenta el mínimo relativo.

$$h\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{2} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = -\frac{9}{16} = -0,5625 \quad \text{El vértice de la parábola se encontrará en el punto: } \mathbf{V} = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{9}{16}\right)$$

2) Cálculo de los puntos de corte con los ejes X e Y.

Puntos de corte con el eje X ($y=0$): Se iguala la función a 0. $\frac{3}{2}x + x^2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 & \mathbf{A} = (0, 0) \\ x_2 = -\frac{3}{2} & \mathbf{B} = \left(-\frac{3}{2}, 0\right) \end{cases}$

El punto de corte con el eje Y ($x=0$): Se sustituye la x por cero en la función.

$$f(0) = \frac{3}{2} \cdot 0 + \frac{3}{2} \cdot 0^2 = 0 \longrightarrow \mathbf{A} = (0, 0)$$

Problema 5

Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:

b) Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. $h(x) = \frac{3}{2}x + x^2$ $h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$

$$V = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{9}{16}\right) \quad A = (0, 0) \quad B = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$$

3) Se dan valores auxiliares alrededor del vértice si con los anteriores no basta.

x	$h(x)$
-1	$-\frac{1}{2}$
1	$\frac{5}{2}$

$$f(-1) = \frac{3}{2} \cdot (-1) + (-1)^2 = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{3}{2} \cdot 1 + 1^2 = \frac{5}{2}$$

Problema 5

Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:

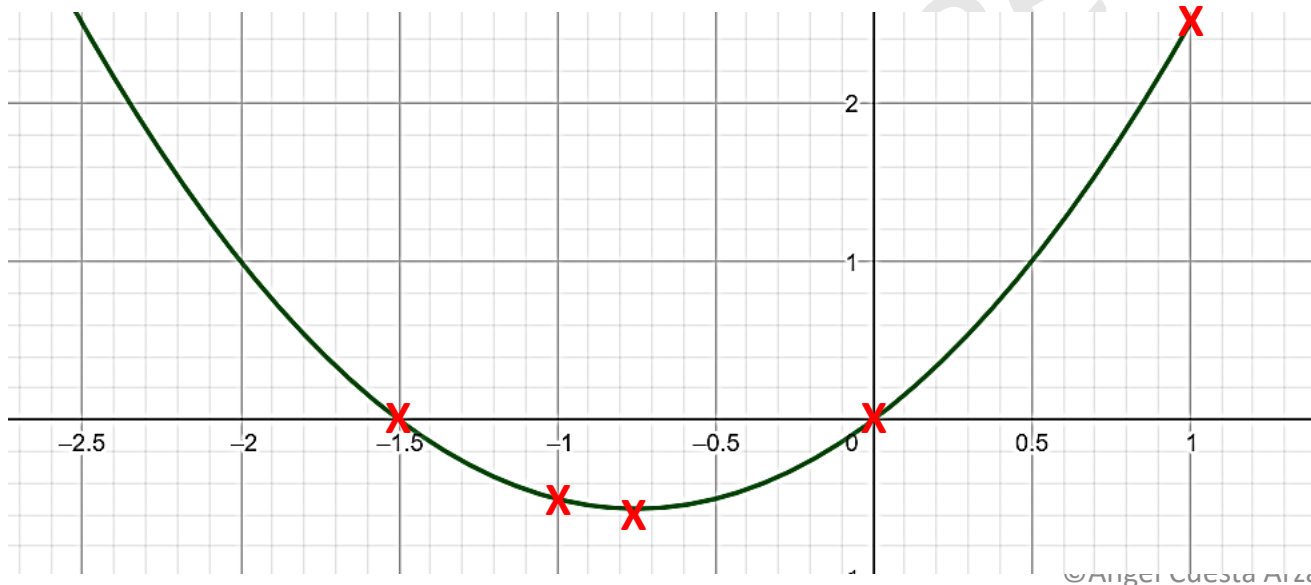
b) Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$.

$$V = \left(-\frac{3}{4}, -\frac{9}{16}\right) \quad A = (0, 0) \quad B = \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$$

x	$h(x)$
-1	$-\frac{1}{2}$
1	$\frac{5}{2}$

$$h(x) = \frac{3}{2}x + x^2 \quad h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$$

Si lo necesitas, puedes dar más valores. A continuación, daremos valores a la función derivada y la representaremos en la misma gráfica.

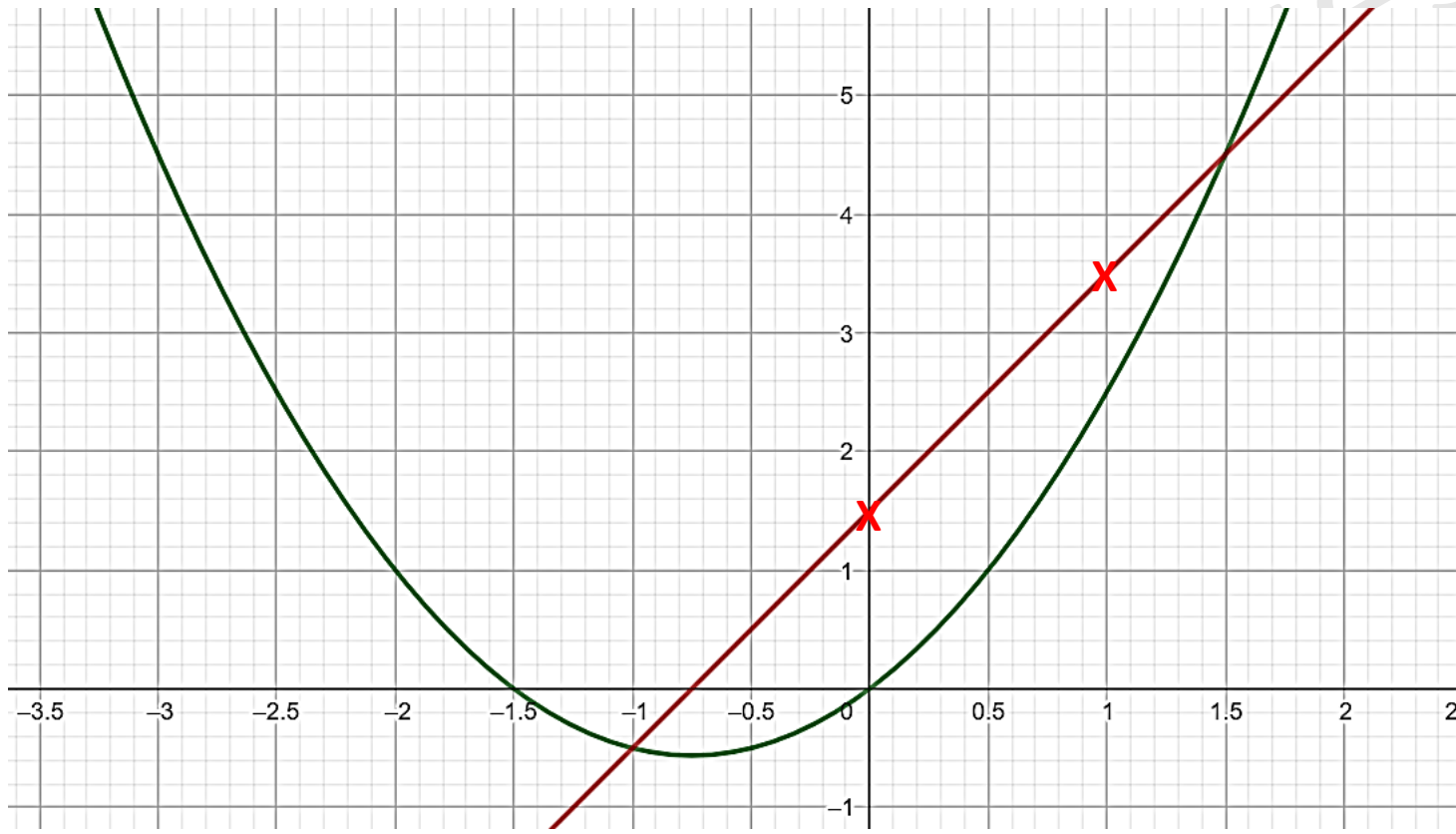


Problema 5

Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:

b) Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. $h(x) = \frac{3}{2}x + x^2$ $h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$

A continuación, daremos valores a la función derivada y la representaremos en la misma gráfica.



x	$h'(x)$
0	$\frac{3}{2}$
1	$\frac{7}{2}$

Problema 5

c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas.

Se muestra en el gráfico el área que debemos calcular.

Para calcular el área pedida, debemos calcular los puntos de corte entre ambas funciones.

$$h(x) = \frac{3}{2}x + x^2 \quad h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$$

Se igualan las funciones. $\frac{3}{2}x + x^2 = \frac{3}{2} + 2x$

Y se resuelve la ecuación de segundo grado que definen.

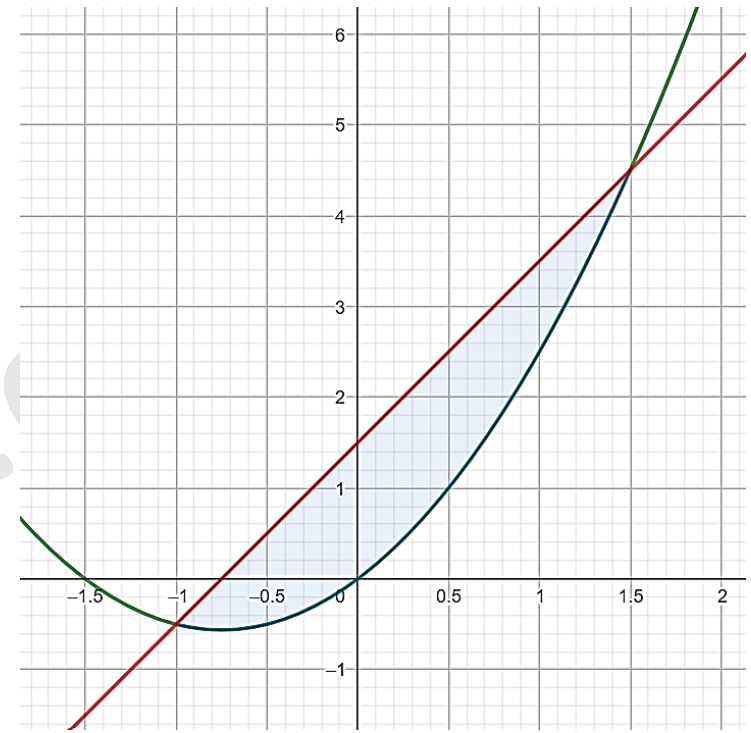
$$x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \longrightarrow 2x^2 - x - 3 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{cases}$$

El área se calcula con la integral definida de la diferencia entre las funciones.

Debemos tener en cuenta que: $h'(x) \geq h(x) \forall x \in [-1, 3/2]$

Los puntos de intersección entre ellas son los límites de integración.

$$A = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left(\frac{3}{2} + 2x \right) - \left(\frac{3}{2}x + x^2 \right) dx = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) dx$$



Problema 5

c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas.

$$A = \int_{-1}^{\frac{3}{2}} \left(-x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \right) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{3}{2} \cdot x \right]_{-1}^{\frac{3}{2}}$$

$$A = \left(-\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{2} \right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^2}{2} + \frac{3}{2} \cdot (-1) \right) = \left(-\frac{9}{8} + \frac{9}{16} + \frac{9}{4} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \right)$$

$$A = \frac{27}{16} - \left(-\frac{11}{12} \right) = \frac{27}{16} + \frac{11}{12} = \frac{81}{48} + \frac{44}{48} = \frac{125}{48} \text{ unidades de área}$$

El área del plano comprendida entre ambas curvas es **125/48 unidades de área.**