

PAU Comunidad Valenciana



Matemáticas II
Julio 2024



Problema 8
Binomial

PREPÁRATE BIEN

Si no has trabajado nunca con probabilidad, te recomiendo que veas y trabajes con mi curso de probabilidad básica y con los dos cursos de probabilidad más avanzados, donde explico el álgebra de conjuntos y los teoremas fundamentales de la probabilidad, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Te dejo los códigos QR y los enlace para que puedas acceder al vídeo correspondiente.

También es recomendable repasar el contenido de mi vídeo sobre el estudio **de la distribución binomial**.



Distribución binomial

<https://youtu.be/fiElXwykWYY>



Teoría y ejercicios de probabilidad.

<https://youtu.be/1Dvh2QpL2pw>



Álgebra de conjuntos

https://youtu.be/Pu_6f73w3o8



Teoremas

<https://youtu.be/KS6VfQgGOCA>

PROBLEMA 8

Se ha determinado que en el 60% de los mensajes enviados por WhatsApp se añade un emoticono. Una persona envía diez mensajes de WhatsApp. Se pide la probabilidad de que:

- a) Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos.
- b) Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos.
- c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos.

Solución: El experimento “se añade un emoticono al mensaje” sólo tiene **dos** posibles resultados (envía emoticono en el mensaje o no lo envía). Además, el añadir o no un emoticono o no, es **independiente** en cada mensaje que se envía. Por consiguiente, podemos decir que el número de mensajes que tienen un emoticono es una variable aleatoria que sigue una distribución binomial. Siendo:

X =número de mensajes enviados por WhatsApp a los que se añade un emoticono.

p =probabilidad de éxito (el mensaje tiene emoticonos)=**0,6**

q =probabilidad de fracaso (el mensaje NO tiene emoticonos)=**0,4**

n =número de mensajes enviados por WhatsApp.

Podemos escribir: $X \sim Bi(10; 0,6)$

PROBLEMA 8

a) Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos. $X \sim Bi(10; 0,6)$

Se calcula la probabilidad: $P(X = 0) = \binom{10}{0} \cdot (0,6)^0 \cdot (0,4)^{10} = (0,4)^{10} \approx 1,049 \cdot 10^{-4}$

La probabilidad de que ningún mensaje de los diez tenga emoticonos es **$1,049 \cdot 10^{-4}$** , es decir un **0,01049 %**.

b) Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos. $X \sim Bi(10; 0,6)$

Las dos quintas partes de 10 son 4 mensajes con emoticonos.

Se calcula la probabilidad: $P(X = 4) = \binom{10}{4} \cdot (0,6)^4 \cdot (0,4)^6 = 210 \cdot (0,6)^4 \cdot (0,4)^6 \approx 0,1115$

La probabilidad de que cuatro mensajes de los diez tenga emoticonos es **0,1115**, es decir un **11,15 %**.

NOTA: Recuerda que: $\binom{10}{4} = \frac{10!}{4! \cdot (10-4)!} = \frac{10!}{4! \cdot 6!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 6!} = 210$

Esta aclaración es por si quieres, o tienes que, hacer el ejercicio sin calculadora.

PROBLEMA 8

c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos.

Se calcula la probabilidad: $P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10)$

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} \cdot (0,6)^8 \cdot (0,4)^2 = 45 \cdot (0,6)^8 \cdot (0,4)^2 \approx 0,1209$$

$$P(X = 9) = \binom{10}{9} \cdot (0,6)^9 \cdot (0,4)^1 = 10 \cdot (0,6)^9 \cdot (0,4)^1 \approx 0,0403$$

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} \cdot (0,6)^{10} \cdot (0,4)^0 = 1 \cdot (0,6)^{10} \cdot (0,4)^0 \approx 0,0060$$

$$P(X \geq 8) = 0,1209 + 0,0403 + 0,0060 = 0,1672$$

La probabilidad de que ocho o más mensajes tengan emoticonos es **0,1672**, es decir un **16,72 %**.

NOTA: También se puede hacer el ejercicio utilizando la tabla que proporcionan en el examen. Se realizará a continuación. Creo que vale la pena trabajar el ejercicio con la tabla puesto que en la universidad es habitual trabajar con este tipo de tablas.

BONUS-USO DE LA TABLA

c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos. $X \sim Bi(10; 0,6)$

Si tratamos de utilizar la tabla, nos encontraremos con el problema de que la probabilidad de éxito igual a **0,6** no está en la tabla que nos proporcionan en el examen. **Sólo hay valores comprendidos entre 0 y 0,5.**

Por ello, debemos hacer un cambio de variable y definir una nueva variable aleatoria asociada al suceso contrario, es decir, el número de mensajes que no tienen emoticono.

Y =número de mensajes que NO tienen emoticono.

p =probabilidad de éxito (el mensaje NO tiene emoticonos)=**0,4**

q =probabilidad de fracaso (el mensaje tiene emoticonos)=**0,6**

Podemos escribir: $Y \sim Bi(10; 0,4)$

Ahora debemos reescribir la pregunta en función de Y . $X + Y = 10 \longrightarrow X = 10 - Y$

$$P(X \geq 8) \xrightarrow{X = 10 - Y} P(10 - Y \geq 8) \longrightarrow P(-Y \geq -2) \longrightarrow P(Y \leq 2)$$

Ahora ya podemos utilizar la tabla.

BONUS-USO DE LA TABLA

c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos. $Y \sim Bi(10; 0,4)$

$$P(Y \leq 2) = 0,1673$$

Taula de la distribució binomial (Bin(n,p))
Tabla de la distribución Binomial (Bin(n,p))

$$F(x) = p(X \leq x) = \sum_{k=1}^x \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

n	k	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	1/3	0,35	0,40	0,45	0,50
1	0	0,9900	0,9500	0,9000	0,8000	0,7500	0,7000	0,6667	0,6500	0,6000	0,5500	0,5000
	1	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
10	0	0,9044	0,5987	0,3487	0,1074	0,0563	0,0282	0,0173	0,0135	0,0060	0,0025	0,0010
	1	0,9957	0,9139	0,7361	0,3758	0,2440	0,1493	0,1040	0,0860	0,0464	0,0233	0,0107
	2	0,9999	0,9885	0,9298	0,6778	0,5256	0,3828	0,2991	0,2616	0,1673	0,0996	0,0547
	3	1,0000	0,9990	0,9872	0,8791	0,7759	0,6496	0,5593	0,5138	0,3823	0,2660	0,1719

La probabilidad de que ocho o más mensajes tengan emoticonos es **0,1673**, es decir un **16,73 %**.

NOTA: El resultado cambia en una diezmilésima.