

En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

Problema 1. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde k es un número real.

- ¿Para qué valores del parámetro k la matriz A es invertible? (2 puntos)
- Para $k = 0$, si existe, calcular la matriz inversa de A . (4 puntos)
- Para $k = 0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $AD = DA$. (4 puntos)

Problema 2. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Se pide:

- Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene una única solución. (5 puntos)
- Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación $A^2X = B$, encontrar el valor de α, β y γ dependiendo del parámetro real a . (5 puntos)

Problema 3. Se dan las rectas $r: x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{2}$ y $s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$. Se pide:

- Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección. (5 puntos)
- Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s . (5 puntos)

Problema 4. Sea el plano $\pi: 6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

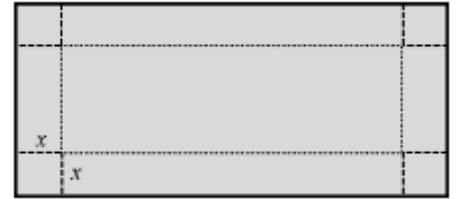
- Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad. (2 puntos)
- Calcular, en función del parámetro d , las coordenadas de los puntos A, B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X, Y y Z , respectivamente. (3 puntos)
- Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior. (5 puntos)

Problema 5. Se considera la función $h(x) = ax + x^2$, donde a es un parámetro real. Se pide:

- El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = -\frac{3}{4}$. (3 puntos)
- Para el valor a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$. (2 puntos)
- Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. (5 puntos)

Problema 6. Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud x en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:

- a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible. (8 puntos)
- b) Dicho volumen. (2 puntos)



Problema 7. Una empresa tiene 3 máquinas de fabricación de latas de refresco. El 10.25% de las latas que fabrica la empresa son defectuosas. El 30% de las latas las fabrica en la primera máquina, siendo el 10% defectuosas. El 25% de las latas las fabrica en la segunda máquina, siendo el 5% defectuosas. El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa? (4 puntos)
- b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina? (3 puntos)
- c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina? (3 puntos)

Problema 8. Se ha determinado que en el 60% de los mensajes enviados por WhatsApp se añade un emoticono. Una persona envía diez mensajes de WhatsApp. Se pide la probabilidad de que:

- a) Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos. (3 puntos)
- b) Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos. (3 puntos)
- c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos. (4 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.