



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

**PROBABILIDAD
DISTRIBUCIÓN BINOMIAL**

JULIO 2025 EXTRA DANA - PROBLEMA 1



PREPÁRATE BIEN

Si no has trabajado nunca con probabilidad, te recomiendo que veas y trabajes con mi curso de probabilidad básica y con los dos cursos de probabilidad más avanzados, donde explico el álgebra de conjuntos y los teoremas fundamentales de la probabilidad, teorema de la probabilidad total y teorema de Bayes. Te dejo los códigos QR y los enlace para que puedas acceder al vídeo correspondiente.

También es recomendable repasar el contenido de mi vídeo sobre el estudio **de la distribución binomial**.



Distribución binomial

<https://youtu.be/fiElXwykWYY>



Teoría y ejercicios de probabilidad.

<https://youtu.be/1Dvh2QpL2pw>



Álgebra de conjuntos

https://youtu.be/Pu_6f73w3o8



Teoremas

<https://youtu.be/KS6VfQgGOCA>

PREGUNTA 1: PROBABILIDAD Y ESTADÍSTICA (2,5 puntos)

Los vuelos que llegan a un aeropuerto se clasifican en tres grupos: vuelos puntuales, vuelos con retrasos de hasta tres horas y vuelos con retrasos de más de tres horas. La puntualidad de los vuelos se ve afectada por las condiciones meteorológicas del momento. Si las condiciones meteorológicas son buenas, el porcentaje de los vuelos que llegan con puntualidad es del 70% mientras que el 10% llegan con más de tres horas de retraso. Si las condiciones meteorológicas son malas, el porcentaje de los vuelos que llegan con puntualidad es del 40% mientras que el 30% llegan con más de tres horas de retraso. Se calcula que el 90% de los días las condiciones meteorológicas son buenas.

- 1.1 (0.5 puntos)** ¿Cuál es la probabilidad de que un vuelo llegue con más de 3 horas de retraso?
- 1.2 (1 punto)** Sabiendo que un vuelo ha sido puntual, ¿cuál es la probabilidad de que las condiciones meteorológicas fueran malas?
- 1.3 (1 punto)** Un pasajero realiza un vuelo a dicho aeropuerto, desde donde debe tomar otro vuelo a su destino final. Este segundo vuelo enlaza si el primero llega con 3 horas o menos de retraso. Si realiza este viaje una vez al mes durante un año y viaja siempre en condiciones meteorológicas buenas ¿cuál es la probabilidad de que pueda enlazar con el vuelo a su destino final en todos sus viajes?

Se definen los sucesos dados en el enunciado.

$B = \{\text{El vuelo es puntual}\}$

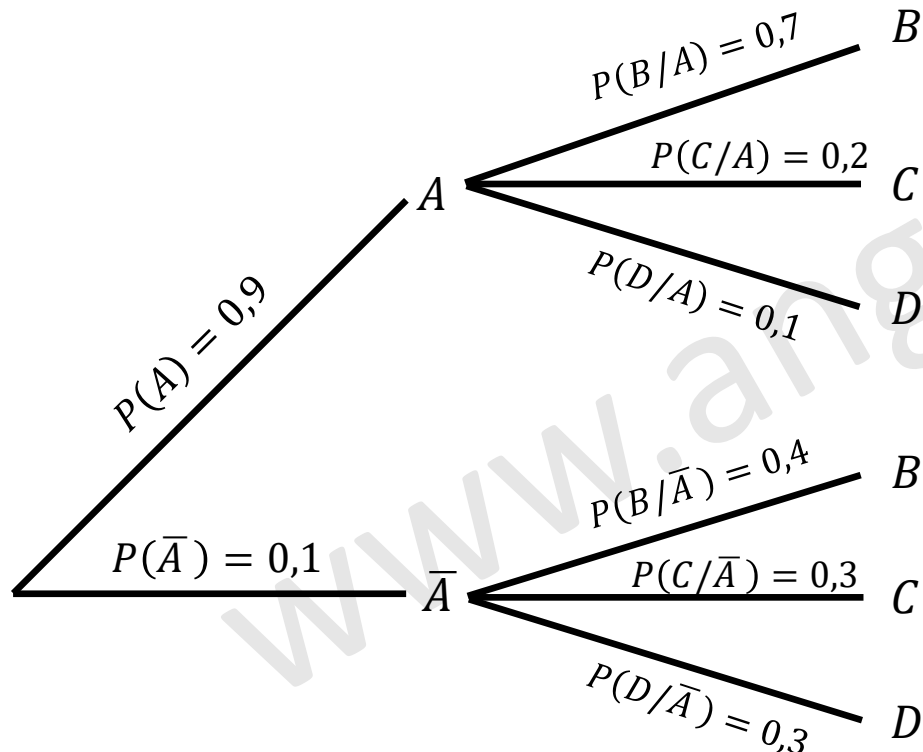
$A = \{\text{Condiciones meteorológicas buenas}\}$

$C = \{\text{El vuelo tiene un retraso de hasta 3 horas}\}$

$\bar{A} = \{\text{Condiciones meteorológicas malas}\}$

$D = \{\text{El vuelo tiene un retraso de más de 3 horas}\}$

Se construye el diagrama de árbol.



“Se calcula que el 90% de los días las condiciones meteorológicas son buenas.”

“Si las condiciones meteorológicas son buenas, el porcentaje de los vuelos que llegan con puntualidad es del 70% mientras que el 10% llegan con más de tres horas de retraso.”

“Si las condiciones meteorológicas son malas, el porcentaje de los vuelos que llegan con puntualidad es del 40% mientras que el 30% llegan con más de tres horas de retraso.”

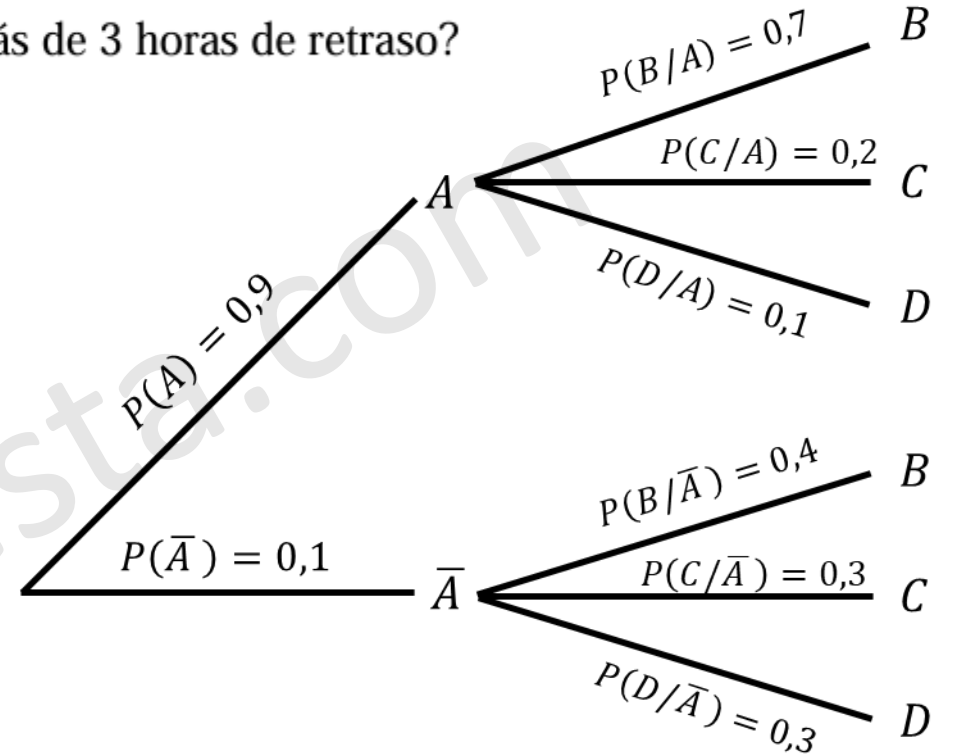
1.1 (0.5 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que un vuelo llegue con más de 3 horas de retraso?

Se aplica el teorema de la probabilidad total.

$$P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(\bar{A}) \cdot P(D/\bar{A})$$

$$P(D) = 0,9 \cdot 0,1 + 0,1 \cdot 0,3 = 0,12$$

La probabilidad de que un vuelo llegue con más de 3 horas de retraso es **0,12 (12 %)**.



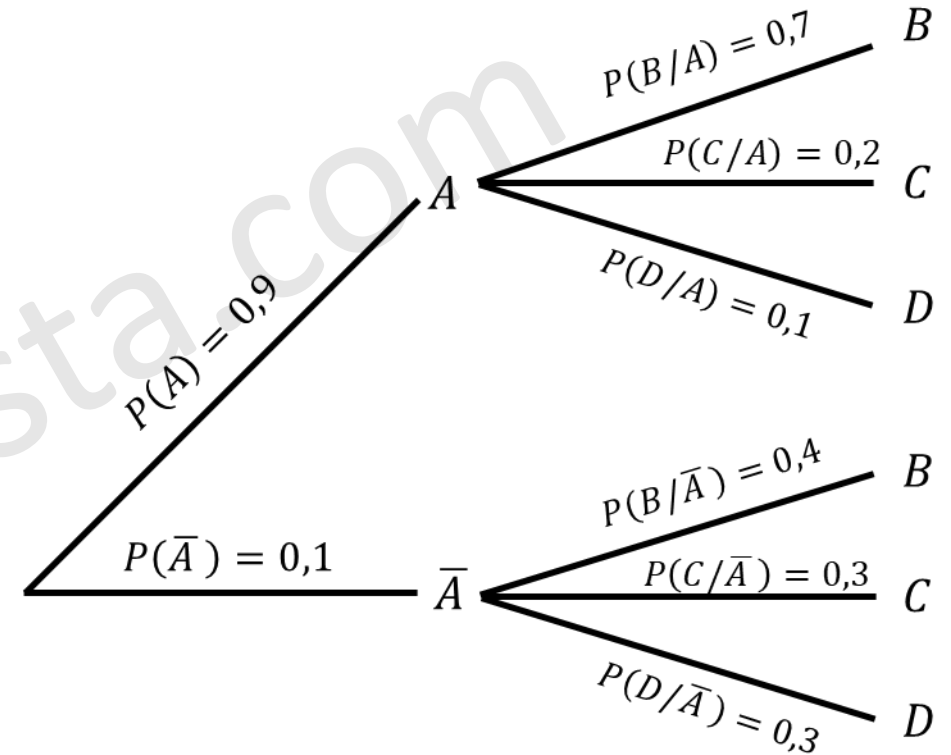
1.2 (1 punto) Sabiendo que un vuelo ha sido puntual, ¿cuál es la probabilidad de que las condiciones meteorológicas fueran malas?

Se aplica el teorema de Bayes (probabilidad condicionada a posteriori)

$$P(\bar{A}/B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A})}{P(A) \cdot P(B/A) + P(\bar{A}) \cdot P(B/\bar{A})}$$

$$P(\bar{A}/B) = \frac{0,1 \cdot 0,4}{0,9 \cdot 0,7 + 0,1 \cdot 0,4} = \frac{0,04}{0,67} \approx 0,0597$$

Sabiendo que un vuelo ha sido puntual, la probabilidad de que las condiciones meteorológicas fueran malas es **0,0597 (5,97 %)**.



1.3 (1 punto) Un pasajero realiza un vuelo a dicho aeropuerto, desde donde debe tomar otro vuelo a su destino final. Este segundo vuelo enlaza si el primero llega con 3 horas o menos de retraso. Si realiza este viaje una vez al mes durante un año y viaja siempre en condiciones meteorológicas buenas ¿cuál es la probabilidad de que pueda enlazar con el vuelo a su destino final en todos sus viajes?

Sea X el número vuelos al año en los que puede enlazar con el vuelo a su destino final.

X es una variable aleatoria binomial. Se supone independencia entre meses; el pasajero viaja siempre con buen tiempo:

$$n = 12; p = P(B/A) + P(C/A) = 0,7 + 0,2 = 0,9; q = 1 - p = 1 - 0,9 = 0,1 \quad X \sim Bi(12; 0,9)$$

$$P(X = 12) = \binom{12}{12} \cdot 0,9^{12} \cdot 0,1^0 = 0,2824$$

La probabilidad de que pueda enlazar con el vuelo a su destino final en todos sus viajes es **0,2824 (28,24 %)**.



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

ÁLGEBRA MATRICIAL

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

JULIO 2025 EXTRA DANA - PROBLEMA 2.1



Ejercicio 2.1

2.1 Se considera la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

que depende de un parámetro real m , y las matrices

$$E = (1 \quad 4 \quad 3) \quad \text{y} \quad F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

2.1.1 **(0.5 puntos)** Indicar, si existen, los valores del parámetro m para los que D tiene inversa.

2.1.2 **(1 punto)** Calcular las matrices EF y $(FE)^t$, si existen.

2.1.3 **(1 punto)** Resolver, para $m = 0$, la ecuación matricial con incógnita X :

$$\frac{1}{2}X + D = D^{-1}.$$

Una matriz cuadrada tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 - 1 \longrightarrow -m^2 - 1 = 0 \longrightarrow \nexists m \in \mathbb{R} \quad \boxed{\exists D^{-1} \forall m \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 2.1

2.1.2 (1 punto) Calcular las matrices EF y $(FE)^t$, si existen. $E = (1 \ 4 \ 3)$ y $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$E \cdot F = (1 \ 4 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 6 \quad \boxed{E \cdot F = 6}$$

$$F \cdot E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 4 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 1 & (-1) \cdot 4 & (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Se traspone la matriz obtenida.

$$(F \cdot E)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

NOTA: podría hacerse el ejercicio utilizando la propiedad. $(F \cdot E)^t = E^t \cdot F^t$

Ejercicio 2.1

2.1 Se considera la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

que depende de un parámetro real m , y las matrices

Para $m = 0$, escribo la matriz:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.3 (1 punto) Resolver, para $m = 0$, la ecuación matricial con incógnita X :

$$\frac{1}{2}X + D = D^{-1}.$$

Se despeja la incógnita X . $\frac{1}{2}X + D = D^{-1} \longrightarrow \frac{1}{2}X = D^{-1} - D \longrightarrow X = 2 \cdot (D^{-1} - D)$

Calculo la matriz inversa de D .

1) Calculo $|D|$; $|D| = -m^2 - 1 \xrightarrow{m=0} |D| = -1$ $|D| \neq 0$, la matriz D **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(D) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.1

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(D))^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot (Adj(D))^t \longrightarrow D^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculo la matriz $D^{-1} - D$.

$$D^{-1} - D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculo X . $X = 2 \cdot (D^{-1} - D) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Álgebra matricial

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

JULIO 2025 EXTRA DANA - PROBLEMA 2.2



Ejercicio 2.2

2.2 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.2.1 (1.25 puntos) Estudiar el rango de la matriz A en función del parámetro real m .

2.2.2 (1.25 puntos) Para $m = 0$, calcular la matriz inversa de $\frac{1}{6}A$, si existe.

Se calcula el rango de A mediante determinantes. Para ello, Se calcula el determinante de la matriz y se iguala a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -2m^2 + m + 6 \longrightarrow -2m^2 + m + 6 = 0 \longrightarrow \begin{cases} m = -3/2 \\ m = 2 \end{cases}$$

Si $m \neq -3/2$ y $m \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 3$

Si $m = -3/2$ o $m = 2 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow Rg(A) \leq 2$ Se calcula el menor principal de orden 2 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Por lo tanto:
Si $m \neq -3/2$ y $m \neq 2 \rightarrow Rg(A) = 3$
Si $m = -3/2$ y $m = 2 \rightarrow Rg(A) = 2$

Ejercicio 2.2

2.2 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 (1.25 puntos) Para $m = 0$, calcular la matriz inversa de $\frac{1}{6}A$, si existe.

Se aplican las propiedades de las matrices para expresar la inversa pedida en función de la matriz inversa de A .

$$A \cdot A^{-1} = I \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{6} \cdot A}_B \cdot \underbrace{6 \cdot A^{-1}}_{B^{-1}} = I \xrightarrow{B \cdot B^{-1} = I} \left(\frac{1}{6} \cdot A\right)^{-1} = 6 \cdot A^{-1}$$

Se calculará la matriz inversa de A en primer lugar y después se dará la solución al ejercicio.

Para $m = 0$, escribo la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Calculo la matriz inversa de A , mediante el método de los adjuntos.

1) Calculo $|A|$; $|A| = -2m^2 + m + 6 \xrightarrow{m=0} |A| = 6$ $|A| \neq 0$, la matriz A **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.2

2.2 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 (1.25 puntos) Para $m = 0$, calcular la matriz inversa de $\frac{1}{6}A$, si existe.

Recordamos que anteriormente se había demostrado que: $\left(\frac{1}{6} \cdot A\right)^{-1} = 6 \cdot A^{-1}$ $A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Se calcula la inversa pedida: $\left(\frac{1}{6} \cdot A\right)^{-1} = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\frac{1}{6} \cdot A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría en el espacio

$$\pi_1: 2x - ay - az = a - 1$$

$$\pi_2: (a - 1)x - ay - z = a$$

JULIO 2025 EXTRA DANA - PROBLEMA 3.1



REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



Ejercicio 3.1

3.1 Dados los planos $\pi_1: 2x - a^2y - az = a - 1$ y $\pi_2: (a - 1)x - ay - z = a$, se pide:

3.1.1 (1.5 puntos) Estudiar en función de a si los planos anteriores coinciden, son paralelos no coincidentes o se cortan.

3.1.2 (0.5 puntos) Calcular, para $a = 0$, el ángulo entre los planos π_1 y π_2 .

3.1.3 (0.5 puntos) Calcular, para $a = 0$, la distancia entre el punto $P = (1, 0, -1)$ y el plano π_1 .

El vector normal del plano π_1 es $\vec{n}_{\pi_1} = (2, -a^2, -a)$. El vector normal del plano π_2 es $\vec{n}_{\pi_2} = (a - 1, -a, -1)$.

Ambos vectores serán paralelos si sus componentes son iguales o proporcionales. $\frac{2}{a - 1} = \frac{-a^2}{-a} = \frac{-a}{-1}$

$$\frac{2}{a - 1} = \frac{-a}{-1} \longrightarrow 2 = a \cdot (a - 1) \longrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Para $a \neq -1$ y $a \neq 2$, los vectores normales de los planos no son paralelos y π_1 y π_2 **son secantes en una recta**.

Se comprueba cual es su posición relativa para $a = -1$ y $a = 2$.

Sabemos que serán coincidentes o paralelos.

Ejercicio 3.1

3.1 Dados los planos $\pi_1: 2x - a^2y - az = a - 1$ y $\pi_2: (a - 1)x - ay - z = a$, se pide:

3.1.1 (1.5 puntos) Estudiar en función de a si los planos anteriores coinciden, son paralelos no coincidentes o se cortan.

Para $a = -1$. $\pi_1: 2x - y + z = -2$ $\pi_2: -2x + y - z = -1$

Se verifica que **son paralelos**, ya que: $\frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{-1}$ Las ecuaciones de los planos no son proporcionales.

Para $a = 2$. $\pi_1: 2x - 4y - 2z = 1$ $\pi_2: x - 2y - z = 2$

Se verifica que **son paralelos**, ya que: $\frac{2}{1} = \frac{-4}{-2} = \frac{-2}{-1} \neq \frac{1}{2}$ Las ecuaciones de los planos no son proporcionales.

Para $a \neq -1$ y $a \neq 2$, π_1 y π_2 **son secantes en una recta**.

Para $a = -1$ y $a = 2$, π_1 y π_2 **son paralelos**.

Ejercicio 3.1

3.1 Dados los planos $\pi_1: 2x - a^2y - az = a - 1$ y $\pi_2: (a - 1)x - ay - z = a$, se pide:

3.1.2 (0.5 puntos) Calcular, para $a = 0$, el ángulo entre los planos π_1 y π_2 .

Para $a = 0$. $\pi_1: 2x = -1$ $\pi_2: -x - z = 0$

El vector normal del plano π_1 es $\vec{n}_{\pi_1} = (2, 0, 0)$. El vector normal del plano π_2 es $\vec{n}_{\pi_2} = (-1, 0, -1)$.

El ángulo que forman dos planos es igual al que forman sus vectores normales. Se calcula el ángulo que forman los vectores normales con la fórmula correspondiente.

$$\cos(\beta) = \frac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}|}{|\vec{n}_{\pi_1}| \cdot |\vec{n}_{\pi_2}|} = \frac{|(2, 0, 0) \cdot (-1, 0, -1)|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2|}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \beta = 45^\circ$$

Para $a = 0$, π_1 y π_2 forman un ángulo de 45°

Ejercicio 3.1

3.1 Dados los planos $\pi_1: 2x - a^2y - az = a - 1$ y $\pi_2: (a - 1)x - ay - z = a$, se pide:

3.1.3 (0.5 puntos) Calcular, para $a = 0$, la distancia entre el punto $P = (1, 0, -1)$ y el plano π_1 .

Para $a = 0$. $\pi_1: 2x = -1 \longrightarrow \pi_1: 2x + 1 = 0$

Para calcular la distancia de un punto a un plano basta aplicar la fórmula correspondiente.

$$d_{D-\pi_1} = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{|3|}{2} = \frac{3}{2}$$

La distancia del punto P al plano π_1 es igual a $\frac{3}{2}$ unidades de longitud.



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría en el espacio

$$\pi: 2x + 3y - z = 0$$

$$r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$$

JULIO 2025 EXTRA DANA - PROBLEMA 3.2



REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



Ejercicio 3.2

3.2 Dado el plano $\pi: 2x + y - 3 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$, se pide:

3.2.1 (1.25 puntos) Obtener la ecuación del plano perpendicular a π y que contiene a r .

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular, si existe, un plano paralelo a π y que contenga a r .

Se hace un esquema de la situación.

El vector normal de π , será director del plano pedido.

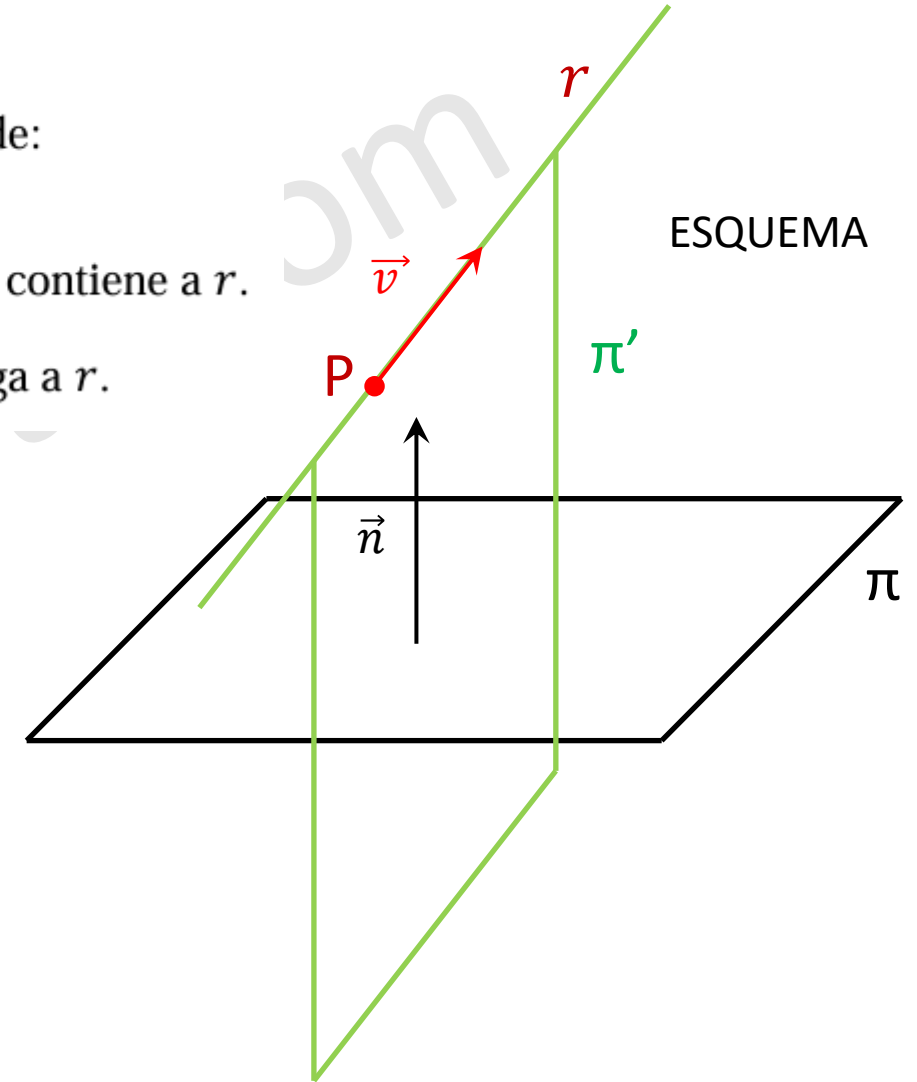
El plano pedido, π' , tendrá por vectores directores $\vec{n}$ y $\vec{v}$ y pasará por un punto $P \in r$.

El vector normal del plano π es: $\vec{n} = (2, 1, 0)$

El vector $\vec{v}$ es: $\vec{v} = (1, -2, 0)$

El punto P es: $P = (1, -1, 1)$

Ya tenemos todos los datos necesarios para calcular la ecuación de π' , lo hago en la siguiente diapositiva.



Ejercicio 3.2

3.2.1 (1.25 puntos) Obtener la ecuación del plano perpendicular a π y que contiene a r .

Los datos son: $\vec{n} = (2,1,0)$ $\vec{v} = (1,-2,0)$ $P = (1,-1,1)$

La ecuación del plano se puede obtener a partir de:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ n_x & n_y & n_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0$$

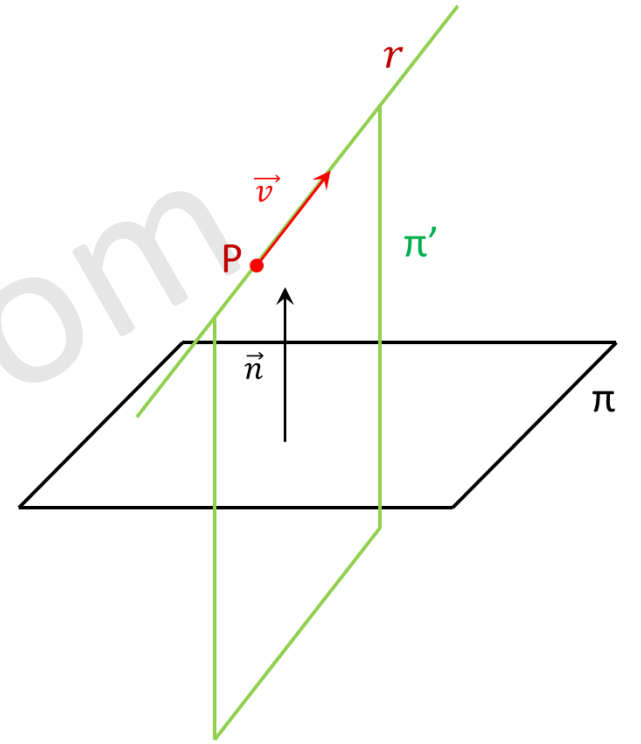
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ n_x & n_y & n_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x - 1 & y + 1 & z - 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -5 + 5z = 0$$

Puedo dividir a ambos lados de la igualdad por 5 para simplificar la expresión de la ecuación del plano pedida.

$$\pi': z - 1 = 0$$

La ecuación del plano perpendicular a π que contiene a r es $\pi': z - 1 = 0$

Como veis, el plano perpendicular a π que contiene la recta r es el plano horizontal $z = 1$.



Ejercicio 3.2

3.2 Dado el plano $\pi: 2x + y - 3 = 0$ y la recta $r: \begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = -1 - 2\alpha \\ z = 1 \end{cases}$, se pide:

3.2.2 (1.25 puntos) Calcular, si existe, un plano paralelo a π y que contenga a r .

La ecuación del plano paralelo a π sería: $\sigma: 2x + y + C = 0$

Se toma un punto genérico de la recta r : $P_\alpha = (1 + \alpha, -1 - 2\alpha, 1)$

Se sustituye el punto en el plano. Para que esté contenida debe obtenerse una identidad válida para todo valor de α .

$$2 \cdot (1 + \alpha) + (-1 - 2\alpha) + C = 0 \longrightarrow 2 + 2\alpha - 1 - 2\alpha + C = 0 \longrightarrow C = -1$$

Para $C = -1$ todos los puntos de la recta r están contenidos en el plano σ paralelo a π .

La ecuación del plano paralelo a π que contiene a r es $\sigma: 2x + y - 1 = 0$



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Análisis de funciones

$$f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$$

$$g(x) = x^2$$

JULIO 2025 EXTRA DANA - PROBLEMA 4.1



4.1 Dadas las funciones $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$ y $g(x) = x^2$, obtener:

4.1.1 (1.25 puntos) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos de la función $y = f(x)$.

4.1.2 (1.25 puntos) El área de la superficie finita encerrada entre las curvas dadas por $f(x)$ y $g(x)$.

Ambas funciones son polinómicas y su dominio es el conjunto de los números reales.

Se calcula la derivada de $f(x)$. $f'(x) = 4x^3 - 14x$

Igualo la derivada a cero: $4x^3 - 14x = 0 \rightarrow x \cdot (4x^2 - 14) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 14 = 0 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{7}{2}} \approx \pm 1,87 \end{cases}$

Se estudia el signo de la derivada. $f'(-2) < 0$ $f'(-1) > 0$ $f'(1) < 0$ $f'(2) > 0$

	$-\infty$	$-\sqrt{7/2}$	0	$\sqrt{7/2}$	$+\infty$
$f'(x)$	-	+	-	+	
$f(x)$					

$f(x)$ **crece** en $(-\sqrt{7/2}, 0) \cup (\sqrt{7/2}, +\infty)$
 $f(x)$ **decrece** en $(-\infty, -\sqrt{7/2}) \cup (0, \sqrt{7/2})$

4.1 Dadas las funciones $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$ y $g(x) = x^2$, obtener:

4.1.1 (1.25 puntos) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos de la función $y = f(x)$.

Se determina la naturaleza de los extremos relativos a partir del estudio de signos de la función derivada.

	$-\infty$	$-\sqrt{7/2}$	0	$\sqrt{7/2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+	-	+
$f(x)$					

En $x = -\sqrt{7/2}$ $f(x)$ presenta un mínimo relativo. $f(-\sqrt{7/2}) = (-\sqrt{7/2})^4 - 7 \cdot (-\sqrt{7/2})^2 + 16 = 15/4$

En $x = 0$ $f(x)$ presenta un máximo relativo. $f(0) = 0^4 - 7 \cdot 0^2 + 16 = 16$

En $x = \sqrt{7/2}$ $f(x)$ presenta un mínimo relativo. $f(\sqrt{7/2}) = (\sqrt{7/2})^4 - 7 \cdot (\sqrt{7/2})^2 + 16 = 15/4$

Mínimos relativos: $\left(-\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{15}{4}\right)$ $\left(\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{15}{4}\right)$ **Máximo relativo:** $(0, 16)$

4.1 Dadas las funciones $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$ y $g(x) = x^2$, obtener:

4.1.2 (1.25 puntos) El área de la superficie finita encerrada entre las curvas dadas por $f(x)$ y $g(x)$.

Se calculan los puntos de corte entre las funciones. El día del examen no vale la pena gastar mucho tiempo en hacer la representación gráfica de las funciones. Aunque yo la haré después con fines pedagógicos.

$$f(x) = g(x) \longrightarrow x^4 - 7x^2 + 16 = x^2 \longrightarrow x^4 - 8x^2 + 16 = 0 \longrightarrow (x^2 - 4)^2 = 0 \longrightarrow x^2 - 4 = 0 \longrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Puesto que $f(x) - g(x) = (x^2 - 4)^2 \geq 0$, deducimos que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$.

Puedes también demostrarlo sustituyendo por un valor del intervalo en ambas funciones.

$$f(0) = 0^4 - 7 \cdot 0^2 + 16 = 16 \quad g(0) = 0^2 = 0$$

Dado que $f(0) > g(0)$, podemos afirmar que $f(x) \geq g(x)$ en el intervalo $[-2, 2]$.

El área de la superficie encerrada se calcula mediante una integral.

$$A = \int_{-2}^2 (f(x) - g(x)) dx = \int_{-2}^2 h(x) dx$$

4.1 Dadas las funciones $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$ y $g(x) = x^2$, obtener:

4.1.2 (1.25 puntos) El área de la superficie finita encerrada entre las curvas dadas por $f(x)$ y $g(x)$.

Se calcula $h(x)$ $h(x) = f(x) - g(x) = x^4 - 7x^2 + 16 - x^2 = x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4)^2 \geq 0$

Se comprueba que $h(x)$ es una función par. Ello me permitirá calcular más fácilmente el valor de la integral.

$$h(-x) = (-x)^4 - 8 \cdot (-x)^2 + 16 = x^4 - 8x^2 + 16 = h(x)$$

Dado que la función $h(x)$ es una función par, podemos calcular el área con: $A = 2 \cdot \int_0^2 h(x) dx$

$$A = 2 \cdot \int_0^2 (x^4 - 8x^2 + 16) dx = 2 \cdot \left[\frac{x^5}{5} - \frac{8x^3}{3} + 16x \right]_0^2 = 2 \cdot \left[\left(\frac{2^5}{5} - \frac{8 \cdot 2^3}{3} + 16 \cdot 2 \right) - \left(\frac{0^5}{5} - \frac{8 \cdot 0^3}{3} + 16 \cdot 0 \right) \right]$$

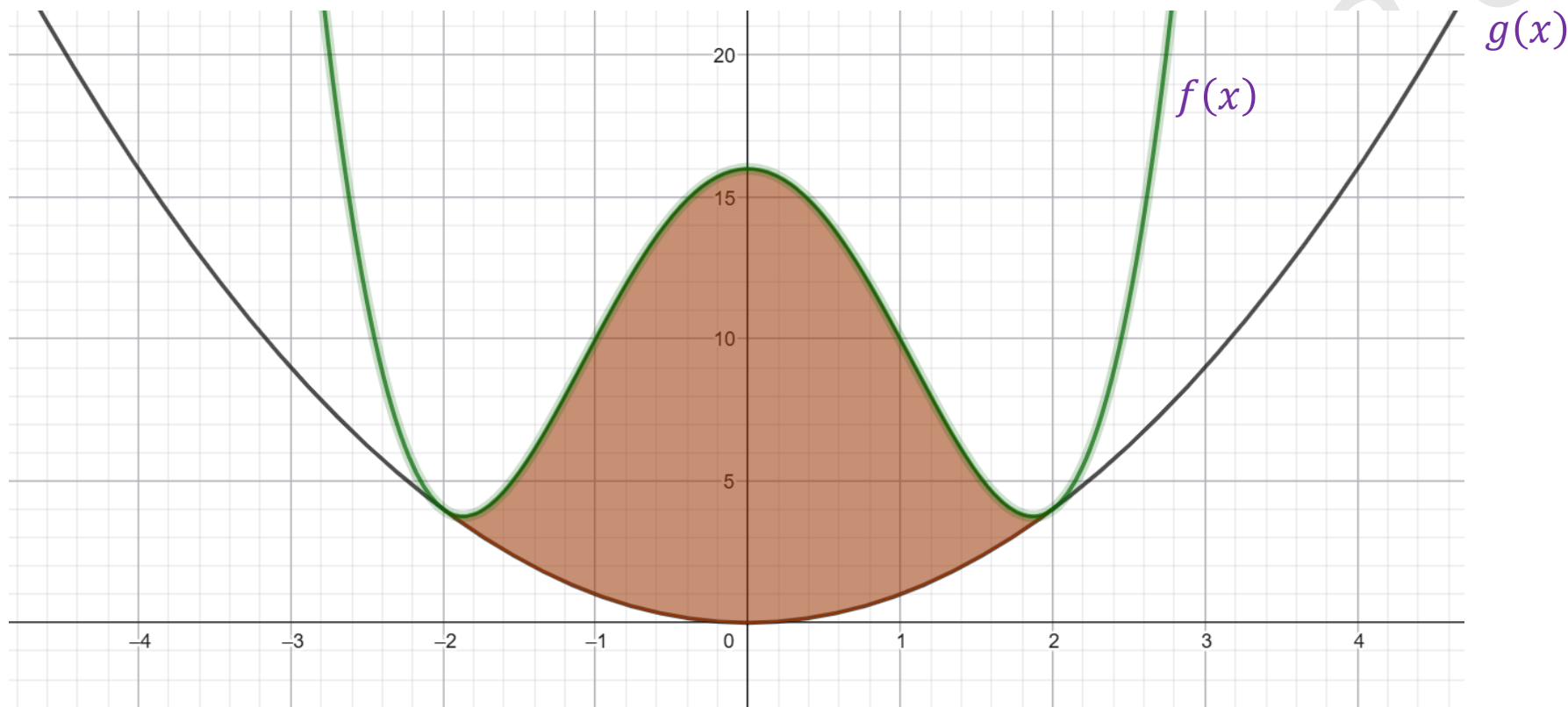
$$A = 2 \cdot \left(\frac{32}{5} - \frac{64}{3} + 32 \right) = \frac{512}{15} \text{ unidades de área}$$

El área pedida es: $A = \frac{512}{15} \text{ u. a}$

4.1 Dadas las funciones $f(x) = x^4 - 7x^2 + 16$ y $g(x) = x^2$, obtener:

4.1.2 (1.25 puntos) El área de la superficie finita encerrada entre las curvas dadas por $f(x)$ y $g(x)$.

Con fines pedagógicos se muestra el área calculada.



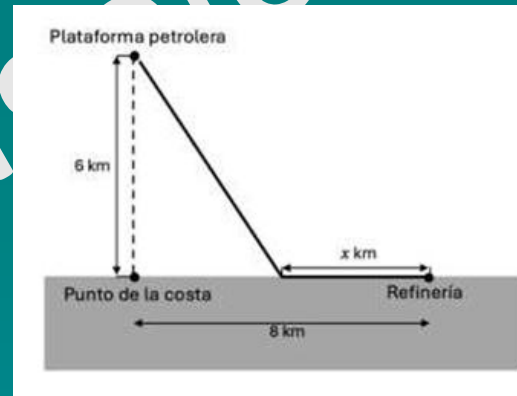


PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



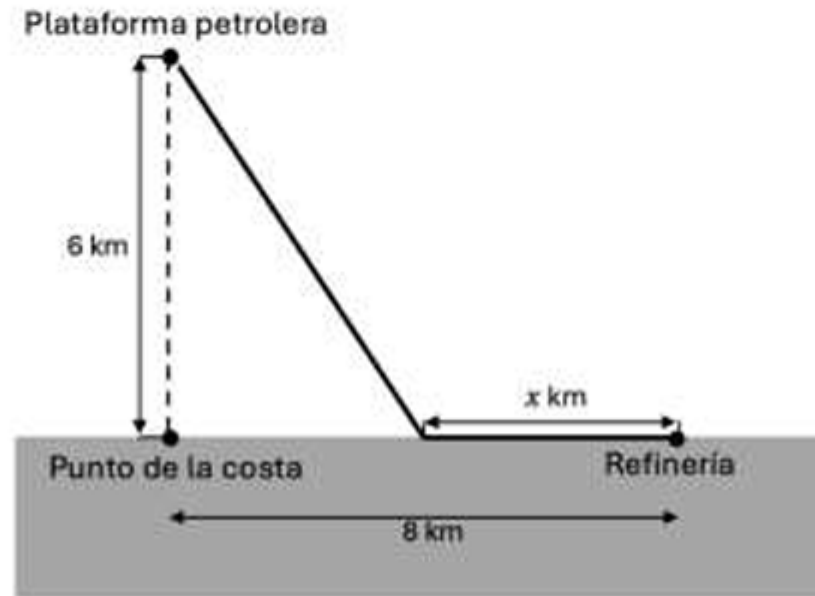
MATEMÁTICAS II

Optimización de funciones



JULIO 2025 EXTRA DANA - PROBLEMA 4.2

4.2 Una costa marítima se extiende en línea recta hacia la derecha desde un punto P de la costa. A 8 km de P hay una refinería situada en la costa. Además, hay una plataforma petrolífera en el mar que está situada a 6 km de distancia de P en la recta perpendicular a la costa desde el punto P . Se construirá un oleoducto desde la plataforma hasta la refinería. El coste de construir el oleoducto bajo el agua es de 1 millón de euros por kilómetro y el de construirlo sobre tierra, de 0,6 millones de euros por kilómetro.



- 4.2.1 (0.5 puntos)** Encontrar la función del coste de construcción del oleoducto dependiendo de la distancia, x , entre el primer punto donde el oleoducto toca la costa y la refinería.
- 4.2.2 (1.5 puntos)** Encontrar el valor de x para que el coste de construcción del oleoducto sea mínimo.
- 4.2.3 (0.5 puntos)** Calcular dicho coste.

Se definen las variables x e y .

x es la longitud del oleoducto construido sobre tierra.

y es la longitud del oleoducto construido bajo el mar.

El coste expresado en millones de euros es: $f(x, y) = 0,6x + y$

Se escribe la ecuación definida por la restricción del problema.

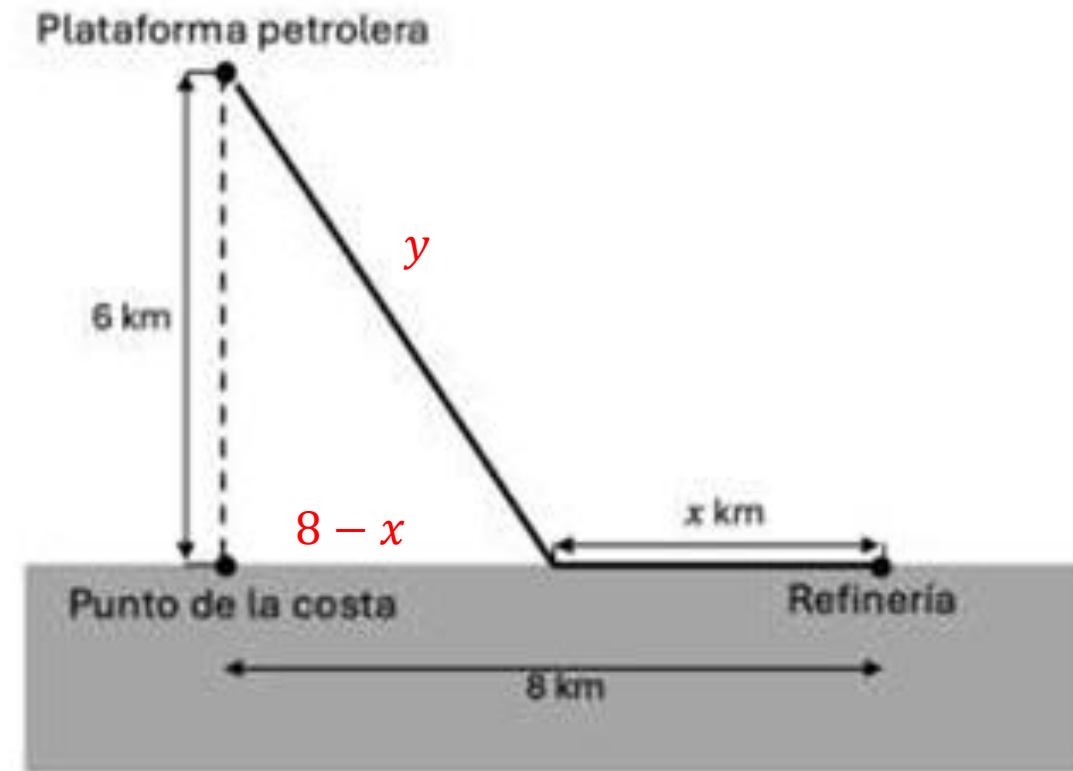
$$y^2 = 6^2 + (8 - x)^2 \quad \text{Se despeja } y: y = \sqrt{36 + (8 - x)^2}$$

Y se sustituye en la función objetivo. $f(x) = 0,6x + \sqrt{36 + (8 - x)^2}$

Se define por completo la función con su dominio.

Dominio $f(x)$: $0 \leq x \leq 8$

La función de coste pedida es: $f(x) = 0,6x + \sqrt{36 + (8 - x)^2}; \quad 0 \leq x \leq 8$



4.2.2 (1.5 puntos) Encontrar el valor de x para que el coste de construcción del oleoducto sea mínimo.

Se deriva la función y se iguala a cero. $f(x) = 0,6x + \sqrt{36 + (8 - x)^2}$; $0 \leq x \leq 8$

$$f'(x) = 0,6 + \frac{2 \cdot (8 - x) \cdot (-1)}{2 \cdot \sqrt{36 + (8 - x)^2}} = 0,6 + \frac{x - 8}{\sqrt{36 + (8 - x)^2}}$$

$$f'(x) = 0; 0,6 + \frac{x - 8}{\sqrt{36 + (8 - x)^2}} = 0 \rightarrow \frac{0,6 \cdot \sqrt{36 + (8 - x)^2} + x - 8}{\sqrt{36 + (8 - x)^2}} = 0 \rightarrow 0,6 \cdot \sqrt{36 + (8 - x)^2} + x - 8 = 0$$

$$0,6 \cdot \sqrt{36 + (8 - x)^2} = 8 - x \rightarrow \left(0,6 \cdot \sqrt{36 + (8 - x)^2}\right)^2 = (8 - x)^2 \rightarrow 0,36 \cdot (36 + (8 - x)^2) = (8 - x)^2$$

$$12,96 + 0,36 \cdot (8 - x)^2 = (8 - x)^2 \rightarrow 12,96 = (8 - x)^2 - 0,36 \cdot (8 - x)^2 \rightarrow 12,96 = 0,64 \cdot (8 - x)^2$$

$$\frac{12,96}{0,64} = (8 - x)^2 \rightarrow 20,25 = (8 - x)^2 \rightarrow \pm\sqrt{20,25} = 8 - x \rightarrow \pm 4,5 = 8 - x \rightarrow \begin{cases} x = 12,5 \\ x = 3,5 \end{cases}$$

La única solución que pertenece al dominio de la función es: $x = 3,5$

4.2.2 (1.5 puntos) Encontrar el valor de x para que el coste de construcción del oleoducto sea mínimo.

Se comprueba que el valor obtenido de x , minimiza el valor del coste del oleoducto. $f'(x) = 0,6 + \frac{x - 8}{\sqrt{36 + (8 - x)^2}}$

Para ello se hace un estudio de signos de la derivada alrededor de $x = 3,5$

	0	3,5	8
$f'(x)$		-	+
$f(x)$			

$$f'(2) = 0,6 + \frac{2 - 8}{\sqrt{36 + (8 - 2)^2}} \approx -0,107 < 0$$

$$f'(5) = 0,6 + \frac{5 - 8}{\sqrt{36 + (8 - 5)^2}} \approx +0,153 > 0$$

Dado que $f(x)$ decrece si $0 \leq x < 3,5$ y $f(x)$ crece si $3,5 < x \leq 8$, podemos afirmar que $x = \mathbf{3,5 \text{ km}}$ minimiza el coste de construcción del oleoducto.

4.2.3 (0.5 puntos) Calcular dicho coste.

Se sustituye $x = 3,5$ en $f(x)$. $f(x) = 0,6x + \sqrt{36 + (8 - x)^2}$; $0 \leq x \leq 8$

$$f(3,5) = 0,6 \cdot 3,5 + \sqrt{36 + (8 - 3,5)^2} = 9,6 \text{ millones de euros}$$

El coste mínimo del oleoducto es **9,6 millones de euros**.