



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

ÁLGEBRA MATRICIAL

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

JULIO 2025 EXTRA DANA - PROBLEMA 2.1



Ejercicio 2.1

2.1 Se considera la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

que depende de un parámetro real m , y las matrices

$$E = (1 \quad 4 \quad 3) \quad \text{y} \quad F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

2.1.1 **(0.5 puntos)** Indicar, si existen, los valores del parámetro m para los que D tiene inversa.

2.1.2 **(1 punto)** Calcular las matrices EF y $(FE)^t$, si existen.

2.1.3 **(1 punto)** Resolver, para $m = 0$, la ecuación matricial con incógnita X :

$$\frac{1}{2}X + D = D^{-1}.$$

Una matriz cuadrada tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -m^2 - 1 \longrightarrow -m^2 - 1 = 0 \longrightarrow \nexists m \in \mathbb{R} \quad \boxed{\exists D^{-1} \forall m \in \mathbb{R}}$$

Ejercicio 2.1

2.1.2 (1 punto) Calcular las matrices EF y $(FE)^t$, si existen. $E = (1 \ 4 \ 3)$ y $F = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$E \cdot F = (1 \ 4 \ 3) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 6 \quad \boxed{E \cdot F = 6}$$

$$F \cdot E = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot (1 \ 4 \ 3) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 3 \\ 2 \cdot 1 & 2 \cdot 4 & 2 \cdot 3 \\ (-1) \cdot 1 & (-1) \cdot 4 & (-1) \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 8 & 6 \\ -1 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

Se traspone la matriz obtenida.

$$(F \cdot E)^t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 8 & -4 \\ 3 & 6 & -3 \end{pmatrix}$$

NOTA: podría hacerse el ejercicio utilizando la propiedad. $(F \cdot E)^t = E^t \cdot F^t$

Ejercicio 2.1

2.1 Se considera la matriz

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & m \\ m & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

que depende de un parámetro real m , y las matrices

Para $m = 0$, escribo la matriz:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2.1.3 (1 punto) Resolver, para $m = 0$, la ecuación matricial con incógnita X :

$$\frac{1}{2}X + D = D^{-1}.$$

Se despeja la incógnita X . $\frac{1}{2}X + D = D^{-1} \longrightarrow \frac{1}{2}X = D^{-1} - D \longrightarrow X = 2 \cdot (D^{-1} - D)$

Calculo la matriz inversa de D .

1) Calculo $|D|$; $|D| = -m^2 - 1 \xrightarrow{m=0} |D| = -1$ $|D| \neq 0$, la matriz D **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(D) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.1

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(D))^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $D^{-1} = \frac{1}{|D|} \cdot (Adj(D))^t \longrightarrow D^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculo la matriz $D^{-1} - D$.

$$D^{-1} - D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculo X . $X = 2 \cdot (D^{-1} - D) = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 0 \\ -4 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$