



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Álgebra matricial

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

JULIO 2025 EXTRA DANA - PROBLEMA 2.2



Ejercicio 2.2

2.2 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.2.1 (1.25 puntos) Estudiar el rango de la matriz A en función del parámetro real m .

2.2.2 (1.25 puntos) Para $m = 0$, calcular la matriz inversa de $\frac{1}{6}A$, si existe.

Se calcula el rango de A mediante determinantes. Para ello, Se calcula el determinante de la matriz y se iguala a cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -2m^2 + m + 6 \longrightarrow -2m^2 + m + 6 = 0 \longrightarrow \begin{cases} m = -3/2 \\ m = 2 \end{cases}$$

Si $m \neq -3/2$ y $m \neq 2 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow Rg(A) = 3$

Si $m = -3/2$ o $m = 2 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow Rg(A) \leq 2$ Se calcula el menor principal de orden 2 $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$

Por lo tanto:
Si $m \neq -3/2$ y $m \neq 2 \rightarrow Rg(A) = 3$
Si $m = -3/2$ y $m = 2 \rightarrow Rg(A) = 2$

Ejercicio 2.2

2.2 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 (1.25 puntos) Para $m = 0$, calcular la matriz inversa de $\frac{1}{6}A$, si existe.

Se aplican las propiedades de las matrices para expresar la inversa pedida en función de la matriz inversa de A .

$$A \cdot A^{-1} = I \longrightarrow \underbrace{\frac{1}{6} \cdot A}_B \cdot \underbrace{6 \cdot A^{-1}}_{B^{-1}} = I \xrightarrow{B \cdot B^{-1} = I} \left(\frac{1}{6} \cdot A\right)^{-1} = 6 \cdot A^{-1}$$

Se calculará la matriz inversa de A en primer lugar y después se dará la solución al ejercicio.

Para $m = 0$, escribo la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Calculo la matriz inversa de A , mediante el método de los adjuntos.

1) Calculo $|A|$; $|A| = -2m^2 + m + 6 \xrightarrow{m=0} |A| = 6$ $|A| \neq 0$, la matriz A **tiene inversa**.

2) Calculo la matriz de los adjuntos: $Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) Calculo la traspuesta de la matriz de los adjuntos: $(Adj(A))^t = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

4) Aplico la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (Adj(A))^t \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejercicio 2.2

2.2 Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & m+1 \\ 0 & 1 & m \\ m-1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

2.2.2 (1.25 puntos) Para $m = 0$, calcular la matriz inversa de $\frac{1}{6}A$, si existe.

Recordamos que anteriormente se había demostrado que: $\left(\frac{1}{6} \cdot A\right)^{-1} = 6 \cdot A^{-1}$ $A^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Se calcula la inversa pedida: $\left(\frac{1}{6} \cdot A\right)^{-1} = 6 \cdot \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\left(\frac{1}{6} \cdot A\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & -1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$