



PAU - COMUNIDAD VALENCIANA



MATEMÁTICAS II

Geometría en el espacio

$$\pi_1: 2x - ay - az = a - 1$$

$$\pi_2: (a - 1)x - ay - z = a$$

JULIO 2025 EXTRA DANA - PROBLEMA 3.1



REPASA LAS MATEMÁTICAS DE 2º DE BACHILLERATO



Matrices y determinantes
Geometría
Probabilidad



Nuevo temario Matemáticas II en
la Comunidad Valenciana



Ejercicio 3.1

3.1 Dados los planos $\pi_1: 2x - a^2y - az = a - 1$ y $\pi_2: (a - 1)x - ay - z = a$, se pide:

3.1.1 (1.5 puntos) Estudiar en función de a si los planos anteriores coinciden, son paralelos no coincidentes o se cortan.

3.1.2 (0.5 puntos) Calcular, para $a = 0$, el ángulo entre los planos π_1 y π_2 .

3.1.3 (0.5 puntos) Calcular, para $a = 0$, la distancia entre el punto $P = (1, 0, -1)$ y el plano π_1 .

El vector normal del plano π_1 es $\vec{n}_{\pi_1} = (2, -a^2, -a)$. El vector normal del plano π_2 es $\vec{n}_{\pi_2} = (a - 1, -a, -1)$.

Ambos vectores serán paralelos si sus componentes son iguales o proporcionales. $\frac{2}{a - 1} = \frac{-a^2}{-a} = \frac{-a}{-1}$

$$\frac{2}{a - 1} = \frac{-a}{-1} \longrightarrow 2 = a \cdot (a - 1) \longrightarrow a^2 - a - 2 = 0 \longrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Para $a \neq -1$ y $a \neq 2$, los vectores normales de los planos no son paralelos y π_1 y π_2 **son secantes en una recta**.

Se comprueba cual es su posición relativa para $a = -1$ y $a = 2$.

Sabemos que serán coincidentes o paralelos.

Ejercicio 3.1

3.1 Dados los planos $\pi_1: 2x - a^2y - az = a - 1$ y $\pi_2: (a - 1)x - ay - z = a$, se pide:

3.1.1 (1.5 puntos) Estudiar en función de a si los planos anteriores coinciden, son paralelos no coincidentes o se cortan.

Para $a = -1$. $\pi_1: 2x - y + z = -2$ $\pi_2: -2x + y - z = -1$

Se verifica que **son paralelos**, ya que: $\frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} \neq \frac{-2}{-1}$ Las ecuaciones de los planos no son proporcionales.

Para $a = 2$. $\pi_1: 2x - 4y - 2z = 1$ $\pi_2: x - 2y - z = 2$

Se verifica que **son paralelos**, ya que: $\frac{2}{1} = \frac{-4}{-2} = \frac{-2}{-1} \neq \frac{1}{2}$ Las ecuaciones de los planos no son proporcionales.

Para $a \neq -1$ y $a \neq 2$, π_1 y π_2 **son secantes en una recta**.

Para $a = -1$ y $a = 2$, π_1 y π_2 **son paralelos**.

Ejercicio 3.1

3.1 Dados los planos $\pi_1: 2x - a^2y - az = a - 1$ y $\pi_2: (a - 1)x - ay - z = a$, se pide:

3.1.2 (0.5 puntos) Calcular, para $a = 0$, el ángulo entre los planos π_1 y π_2 .

Para $a = 0$. $\pi_1: 2x = -1$ $\pi_2: -x - z = 0$

El vector normal del plano π_1 es $\vec{n}_{\pi_1} = (2, 0, 0)$. El vector normal del plano π_2 es $\vec{n}_{\pi_2} = (-1, 0, -1)$.

El ángulo que forman dos planos es igual al que forman sus vectores normales. Se calcula el ángulo que forman los vectores normales con la fórmula correspondiente.

$$\cos(\beta) = \frac{|\vec{n}_{\pi_1} \cdot \vec{n}_{\pi_2}|}{|\vec{n}_{\pi_1}| \cdot |\vec{n}_{\pi_2}|} = \frac{|(2, 0, 0) \cdot (-1, 0, -1)|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + (-1)^2}} = \frac{|-2|}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{2 \cdot \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \longrightarrow \beta = 45^\circ$$

Para $a = 0$, π_1 y π_2 forman un ángulo de 45°

Ejercicio 3.1

3.1 Dados los planos $\pi_1: 2x - a^2y - az = a - 1$ y $\pi_2: (a - 1)x - ay - z = a$, se pide:

3.1.3 (0.5 puntos) Calcular, para $a = 0$, la distancia entre el punto $P = (1, 0, -1)$ y el plano π_1 .

Para $a = 0$. $\pi_1: 2x = -1 \longrightarrow \pi_1: 2x + 1 = 0$

Para calcular la distancia de un punto a un plano basta aplicar la fórmula correspondiente.

$$d_{D-\pi_1} = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C \cdot z_0 + D|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{|2 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) + 1|}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{|3|}{2} = \frac{3}{2}$$

La distancia del punto P al plano π_1 es igual a $\frac{3}{2}$ unidades de longitud.